Numeerinen analyysi

Loppukoe, 11.3.2002

1. Osoita, että jos $\|A\| < 1$, niin $I + A$ on kääntyvä ja

$$\frac{1}{1+\|A\|} \leq \|(I+A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}\,.$$

2. (a) Olkoon $u \in C[a,b]$ sellainen funktio, että u' on paloittain jatkuva ja $u(a) = 0$ tai $u(b) = 0$. Näytä, että on voimassa Poincaren epäyhtälö

$$\int_a^b |u(x)|^2\,dx \leq \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b |u'(x)|^2\,dx.$$

   (b) Tutkitaan tehtävää ($u \in C^2(\overline{I}),\ I = (a,b)$)

$$\begin{cases} \big(Lu\big)(x) = -\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = f(x),\ x \in I \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases} \tag{1}$$

   Oletetaan, että $p \in C^1(\overline{I}),\ 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1,\ q \in C(\overline{I}),\ 0 \leq q_0 \leq q(x) \leq q_1$ ja $f \in C(\overline{I})$. Näytä, että eräälle vakiolle $c > 0$ pätee

$$\|u''\|_0 \leq c\|f\|_0.$$

3. Reuna-arvotehtävän ($c(x) \geq 0$)

$$\begin{cases} -u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u(x) = f(x),\ a < x < b \\ u(a) = \alpha,\ u(b) = \beta \end{cases}$$

differenssiaproksimaatio voidaan suorittaa niin, että yhtälöryhmän kerroinmatriisi tulee irredusoituvasti diagonaalisesti dominoivaksi kaikilla diskretisointiparametrin h arvoilla. Tämä saavutetaan käyttämällä $u'(x)$:lle toispuoleista differenssiä joka ottaa huomioon funktion $b(x)$ etumerkin. Anna matriisyhtälö $A_h u_h = b_h$ ja totea A_h:n väitetty ominaisuus. Mikä on konsistenssin kertaluku?

KÄÄNNÄ!

4. Olkoon $u \in C^2(\overline{I})$ differentiaaliyhtälön

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \ , \quad x \in I = (a,b)$$

sellainen ratkaisu, että $u(a) = u(b) = 0$. Oletetaan, että $p \in C^1(\overline{I}),\ p(x) \geq p_0 > 0,\ q \in C(\overline{I}),\ q(x) \geq 0$ ja $f \in C(\overline{I})$. Olkoon

$$V = \{v \in C(\overline{I}) \ : \ v(a) = v(b) = 0,\ v' \text{ on paloittain jatkuva}\}.$$

Asetetaan $a(u,v) = (pu'|v') + (qu|v)$ ja

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v,v) - (f|v)\,,\ v \in V.$$

Näytä, että

(a) $E(u) = \min\{E(v) \ : \ v \in V\}$

(b) $E(u) < E(v)$ kun $v \in V,\ v \neq u$.

5. Tarkastellaan gradienttimenetelmää vakioparametrilla α, $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r^{(k)}$, $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, missä A on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Näytä, että menetelmä suppenee täsmälleen silloin, kun $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_r}$, missä λ_r on matriisin A suurin ominaisarvo.