Numeerinen analyysi

Loppukoe, 14.5.2001

1. (a) Olkoon $A = (a_{ij})$ $n \times n$-neliömatriisi. Mitä tarkoittavat käsitteet
   i. A on aidosti diagonaalisesti dominoiva
   ii. A on heikosti diagonaalisesti dominoiva
   iii. A on irredusoituva

   (b) Osoita Gerschgorinin lause: Jos λ on matriisin A ominaisarvo, niin on olemassa sellainen indeksi i, että

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$

   Perustele lisäksi Gerschgorinin lauseen seuraus: Jos A on aidosti diagonaalisesti dominoiva, niin se on säännöllinen.

2. (a) Olkoon $u \in C[a,b]$ sellainen funktio, että u' on paloittain jatkuva ja $u(a) = 0$ tai $u(b) = 0$. Näytä, että on voimassa Poincaren epäyhtälö

$$\int_a^b |u(x)|^2 \, dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |u'(x)|^2 \, dx.$$

   (b) Tutkitaan tehtävää ($u \in C^2(\overline{I}),\ I = (a,b)$)

$$(1) \qquad \begin{cases} \big(Lu\big)(x) = -\big(p(x)u'(x)\big)' + q(x)u(x) = f(x), \ x \in I \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

   Oletetaan, että $p \in C^1(\overline{I}),\ 0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1,\ q \in C(\overline{I}),\ 0 \leq q_0 \leq q(x) \leq q_1$ ja $f \in C(\overline{I})$. Näytä, että eräälle vakiolle $c > 0$ pätee

$$\|u''\|_0 \leq c\|f\|_0.$$

3. Olkoon x sellainen vektori, että $x = Mx + c$, missä $\|M\| = L < 1$ ja iteraatiojono $x^{(k)},\ k \in \mathbb{N}_0$, on annettu kaavalla $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$. Näytä, että relaatiot
   (a) $x^{(k)} - x = M^k(x^{(0)} - x)$
   (b) $\|x^{(k)} - x\| \leq L^k \|x^{(0)} - x\|$
   (c) $\|x^{(0)} - x\| \leq \frac{1}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$
   (d) $\|x^{(k)} - x\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

   ovat voimassa.

KÄÄNNÄ!

4. Olkoon $u \in C^2(\overline{I})$ differentiaaliyhtälön

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x) \ , \quad x \in I = (a, b)$$

sellainen ratkaisu, että $u(a) = u(b) = 0$. Oletetaan, että $p \in C^1(\overline{I}),\ p(x) \geq p_0 > 0,\ q \in C(\overline{I}),\ q(x) \geq 0$ ja $f \in C(\overline{I})$. Olkoon

$$V = \{v \in C(\overline{I}) \ : \ v(a) = v(b) = 0,\ v' \text{ on paloittain jatkuva}\}.$$

Asetetaan $a(u, v) = (pu'|v') + (qu|v)$ ja

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f|v) \ ,\ v \in V.$$

Näytä, että

(a) $E(u) = \min\{E(v) \ : \ v \in V\}$

(b) $E(u) < E(v)$ kun $v \in V,\ v \neq u$.

5. Tarkastellaan gradienttimenetelmää vakioparametrilla α, $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r^{(k)}$, $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, missä A on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Näytä, että menetelmä suppenee täsmälleen silloin, kun $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_r}$, missä λ_r on matriisin A suurin ominaisarvo.