

## Numeerinen analyysi

Välikoe 1, 12.3.2001, klo 14-17

HUOM. Valitse neljä tehtävää viidestä!

1. (a) Olkoon  $A = (a_{ij})$   $n \times n$ -neliömatriisi. Mitä tarkoittavat käsitteet
  - i.  $A$  on aidosti diagonaalisesti dominoiva
  - ii.  $A$  on heikosti diagonaalisesti dominoiva
  - iii.  $A$  on irredusoituva
- (b) Osoita Gerschgorinin lause: Jos  $\lambda$  on matriisin  $A$  ominaisarvo, niin on olemassa sellainen indeksi  $i$ , että

$$|\lambda - a_{ii}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|.$$

Perustele lisäksi Gerschgorinin lauseen seuraus: Jos  $A$  on aidosti diagonaalisesti dominoiva, niin se on säännöllinen.

2. Olkoon  $\Omega$  suorakulmainen kolmio, missä kummankin kateetin pituus on 7 yksikköä ja olkoon hilaparametri  $h = 2$  (ks. kääntöpuolen kuva). Määrä differenssimenetelmällä likiratkaisu funktiolle  $u$ , joka toteuttaa

$$\begin{cases} -\Delta u(x, y) = xy, & (x, y) \in \Omega \\ u(x, y) = 0, & (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

3. Osoita, että jos  $\|A\| < 1$ , niin  $I + A$  on kääntyvä ja

$$\frac{1}{1 + \|A\|} \leq \|(I + A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1 - \|A\|}.$$

4. Tutkitaan tehtävää

$$\begin{cases} -u''(x) + 3u(x) = f(x), & 0 \leq x \leq 1 \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Yo. tehtävälle etsitään ratkaisua Rayleigh-Ritzin menetelmällä käyttäen esitystä  $\tilde{u}(x) = \sum_{i=1}^3 c_i \varphi_i(x)$ ,  $\varphi_i(x) = x^i(1-x)$ . Kirjoita yhtälöryhmä kertoimien  $c_i$  ratkaisemiseksi, kun

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 < x \leq \frac{1}{2}, \\ 1-x, & \frac{1}{2} \leq x < 1. \end{cases}$$

KÄÄNNÄ!

5. Olkoon  $u \in C^2(\bar{I})$  differentiaaliyhtälön

$$(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), \quad x \in I = (a, b)$$

sellainen ratkaisu, että  $u(a) = u(b) = 0$ . Oletetaan, että  $p \in C^1(\bar{I})$ ,  $p(x) \geq p_0 > 0$ ,  $q \in C(\bar{I})$ ,  $q(x) \geq 0$  ja  $f \in C(\bar{I})$ . Olkoon

$$V = \{v \in C(\bar{I}) : v(a) = v(b) = 0, v' \text{ on paloittain jatkuva}\}.$$

Asetetaan  $a(u, v) = (pu'|v') + (qu|v)$  ja

$$E(v) = \frac{1}{2}a(v, v) - (f|v), \quad v \in V.$$

Näytä, että

(a)  $E(u) = \min\{E(v) : v \in V\}$

(b)  $E(u) < E(v)$  kun  $v \in V$ ,  $v \neq u$ .

Kuva 1: Tehtävän 2 kolmio.