

Numeerinen analyysi

Välikoe 2, 3.5.2001, klo 14-17

HUOM. Valitse neljä tehtävää viidestä!

1. (a) Olkoon $u \in C[a, b]$ sellainen funktio, että u' on paloittain jatkuva ja $u(a) = 0$ tai $u(b) = 0$. Näytä, että on voimassa Poincarén epäyhtälö

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \frac{(b-a)^2}{2} \int_a^b |u'(x)|^2 dx.$$

- (b) Tutkitaan tehtävää ($u \in C^2(\bar{I})$, $I = (a, b)$)

$$(1) \quad \begin{cases} (Lu)(x) = -(p(x)u'(x))' + q(x)u(x) = f(x), & x \in I \\ u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Oletetaan, että $p \in C^1(\bar{I})$, $0 < p_0 \leq p(x) \leq p_1$, $q \in C(\bar{I})$, $0 \leq q_0 \leq q(x) \leq q_1$ ja $f \in C(\bar{I})$. Näytä, että eräälle vakiolle $c > 0$ pätee

$$\|u''\|_0 \leq c\|f\|_0.$$

2. (a) Anna klassisten iteratiivisten menetelmien (Jacobi, Gauss-Seidel ja SOR) kaavat, kun ratkaistaan yhtälöryhmä $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.
(b) Olkoon A aidosti diagonaalisesti dominoiva. Osoita, että Jacobin iteraatiojono suppenee.
3. Olkoon x sellainen vektori, että $x = Mx + c$, missä $\|M\| = L < 1$ ja iteraatiojono $x^{(k)}$, $k \in \mathbb{N}_0$, on annettu kaavalla $x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + c$. Näytä, että relaatiot

$$(a) \quad x^{(k)} - x = M^k(x^{(0)} - x)$$

$$(b) \quad \|x^{(k)} - x\| \leq L^k \|x^{(0)} - x\|$$

$$(c) \quad \|x^{(0)} - x\| \leq \frac{1}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

$$(d) \quad \|x^{(k)} - x\| \leq \frac{L^k}{1-L} \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$$

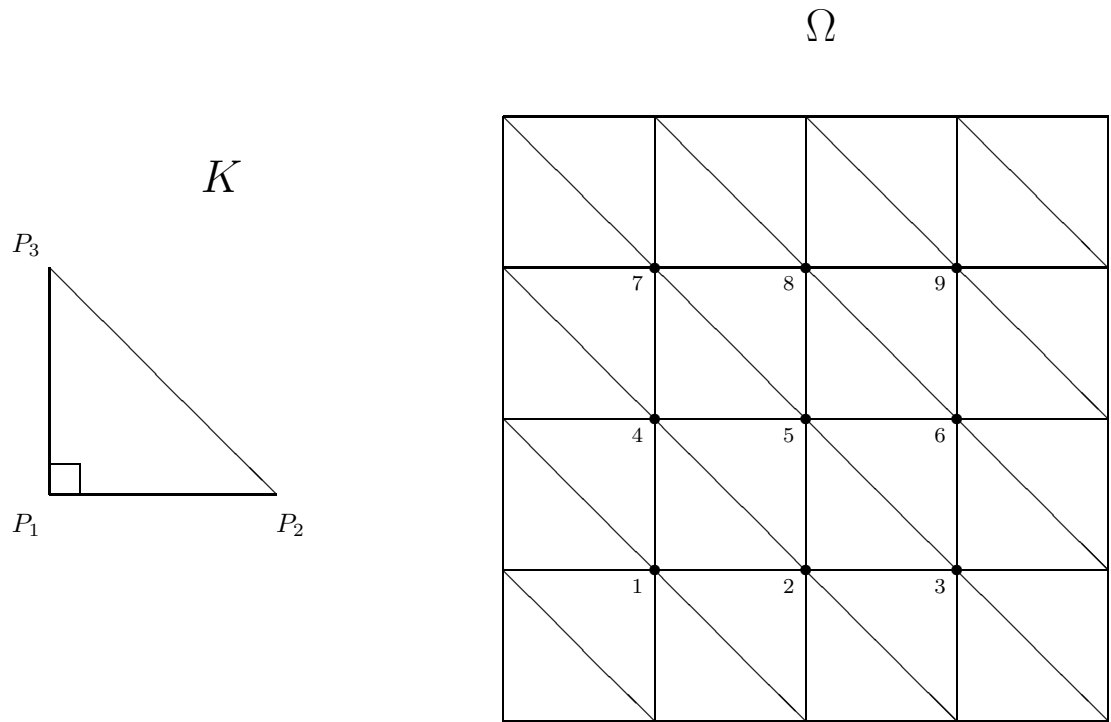
ovat voimassa.

4. Tarkastellaan gradienttimenetelmää vakioparametrilla α , $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha r^{(k)}$, $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$, missä A on symmetrinen ja positiivisesti definiitti. Näytä, että menetelmä suppenee täsmälleen silloin, kun $0 < \alpha < \frac{2}{\lambda_r}$, missä λ_r on matriisin A suurin ominaisarvo.

KÄÄNNÄ!

5. Tarkastellaan yhtälön $-\Delta u = f$ FEM-likiratkaisua alueessa Ω , kun reunaehto on $u|_{\Gamma} = 0$.

- Määrää lokaali jäykkyysmatriisi a^K oheiselle suorakulmaiselle kolmiolle K , jonka kateettien pituus on h .
- Määrää oheisen kolmioinnin tapauksessa globaalin jäykkyysmatriisin viidennen rivin alkio.



Kuva 1: Tehtävän 5 kolmio K ja alue Ω .

APUJA:

$$a^K = \frac{1}{4F} \begin{bmatrix} \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_1 & \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 & \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_3 \\ \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2 & \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_2 & \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3 \\ \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_3 & \bar{l}_2 \cdot \bar{l}_3 & \bar{l}_3 \cdot \bar{l}_3 \end{bmatrix}$$