

1. (a) Selitä lyhyesti S.O.R.-menetelmä lineaarisen yhtälöryhmän ratkaisemisessa.
- (b) Selitä lyhyesti mitä tarkoitetaan adaptiivisuudella numeerisessa integroinnissa ja tavallisen DY:n numeerisessa ratkaisemisessa.
2. Todista induktiolla seuraava jaettujen ja etenevien differenssien yhteyttä koskeva lause. Olkoon funktio f taulukoitu välillä $[a,b]$ tasavälisessä pisteistössä $x_i = a + ih, i = 0, \dots, n$ ja $h = \frac{b-a}{n}$. Tällöin pätee:

$$f[x_k, \dots, x_{k+i}] = \frac{1}{i!h^i} \Delta^i f_k$$

3. Tehtävänä on funktion $f(x) = x^3/(1 - x^2)$, missä $|x| \neq 1$, arvojen laskeminen. Arvioi tehtävän häiriöalttiutta eli ehtolukua eri x :n arvoilla. (Vihje: Väliarvolause voi olla hyödyllinen)

4. Laske

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx$$

numeerisesti Simpsonin säännöllä ($h=1/2$).

5. Ratkaise Eulerin menetelmällä DY-ryhmä

$$\begin{cases} y'(x) = -ay(x) & x > 0, a \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

ratkaisu pisteessä $x=1$ kun askelpituus $h=1/4$.

Kaavoja:

$$f[x_k, \dots, x_{k+i}] = (f[x_{k+1}, \dots, x_{k+i}] - f[x_k, \dots, x_{k+i-1}]) / (x_{k+i} - x_k)$$

$$\Delta^i f_k = \begin{cases} f_k, & i = 0, \\ \Delta^{i-1} f_{k+1} - \Delta^{i-1} f_k, & i > 0 \end{cases}$$