Numeriikan peruskurssi **LOPPUKOE 24.05.2010**

1. Selitä **lyhyesti** seuraavat käsitteet:

   a) Hornerin kaava

   b) numeerisen integrointikaavan tarkkuusaste

   c) numeerisen probleeman stabiilisuus ja ehtoluku

---

2. Esitä Newtonin menetelmä

   a) epälineaarisen yhtälön f(x)=0 ratkaisemiseksi,

   b) epälineaarisen yhtälöryhmän $\begin{bmatrix} f_1(\mathrm{x}) \\ f_2(\mathrm{x}) \\ \vdots \\ f_n(\mathrm{x}) \end{bmatrix} = 0, \quad \mathrm{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$ ratkaisemiseksi. Mitä voit sanoa menetelmän konvergenssistä.

---

3. Todista induktiolla seuraava jaettujen ja etenevien differenssien yhteyttä koskeva lause. Olkoon funktio f taulukoitu välillä [a,b] tasavälisessä pisteistössä $x_i = a + ih, i = 0, ..., n$ ja $h = \frac{b-a}{n}$. Tällöin pätee:

$$f[x_k, ..., x_{k+i}] = \frac{1}{i!h^i}\Delta^i f_k$$

[määritelmiä: $f[x_k, ..., x_{k+i}] = (f[x_{k+1}, ..., x_{k+i}] - f[x_k, ..., x_{k+i-1}])/(x_{k+i} - x_k)$

$$\Delta^i f_k = \begin{cases} f_k, & i = 0, \\ \Delta^{i-1} f_{k+1} - \Delta^{i-1} f_k, & i > 0 \end{cases} \quad]$$

---

4. a) Kuvaile lyhyesti Rombergin extrapolaatiomenetelmä

   b) Laske Rombergin 1. extrapolaatti integraalille

$$\int_0^\pi \sin x dx$$

[ekstrapolointikaava: $T_{k+1,j+1} = \frac{4^{j+1}T_{k+1,j} - T_{k,j}}{4^{j+1} - 1}$]

---

5. Ratkaise Eulerin menetelmällä DY-ryhmä

$$\begin{cases} y'(x) = -ay(x) & x > 0, a \in \mathbb{R}, \\ y(0) = 1, \end{cases}$$

ratkaisu pisteessä x=1 kun askelpituus h=1/4.