Optimointiteoria

Loppukoe 15.12.2011.

1. Teollisuuslaitos valmistaa piirejä R1 ja R2, joissa on neljää eri komponenttia seuraavat määrät:

Piiri	Komp1	Komp2	Komp3	Komp4
R1	3	1	2	2
R2	4	2	3	0

Päivittäistä tuotantoa varten on saatavilla seuraavat määrät komponentteja: Komponenttia 1 on 2400 kpl, komponenttia 2 on 900 kpl, komponenttia 3 on 1600 kpl ja komponenttia 4 on 1200 kpl. Piiristä R1 saadaan voittoa 5 senttiä/piiri ja piiristä R2 9 senttiä/piiri.

   (a) Kirjoita optimointiongelma (voiton maksimointi) standardimuodossa ja ratkaise se *simplex-menetelmällä.*

   (b) Määrää tehtävän duaalitehtävä ja ratkaise se *duaalisella simplex-menetelmällä.*

2. Olkoon X erään lineaarisen optimoinnin tehtävän käypien ratkaisujen joukko ja x_0 tehtävän sellainen optimaalinen ratkaisu, että

$$c^T x_0 = \min_{x \in X} c^T x,$$

missä $c \in \mathbb{R}^n,\ c \neq \theta$ on annettu vektori. Osoita, että

   (a) x_0 on joukon X reunapiste.

   (b) Hypertaso $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid c^T x = c^T x_0\}$ on joukon X kantava hypertaso.

3. Olkoon $f(x_1, x_2) = x_1^2 - x_1 x_2 + \frac{3}{2} x_2^2$. Lähtien alkuarvosta $x^{(0)} = (1, 2)^T$ laske kaksi iteraatiota DFP-menetelmällä, kun $D_0 = I$. Valitse sellainen $t_k > 0$, että funktio

$$\varphi_k(t) = f\big(x^{(k)} - tD_k \nabla f(x^{(k)})\big)$$

minimoituu.

Vihje: DFP-menetelmä: $x^{(k+1)} = x^{(k)} - t_k D_k \nabla f(x^{(k)}),$ missä

$$D_{k+1} = D_k + \frac{d^{(k)} \otimes d^{(k)}}{y^{(k)} \cdot d^{(k)}} - \frac{D_k y^{(k)} \otimes D_k y^{(k)}}{y^{(k)} \cdot D_k y^{(k)}},$$

$$d^{(k)} = x^{(k+1)} - x^{(k)}, \qquad y^{(k)} = \nabla f(x^{(k+1)}) - \nabla f(x^{(k)})$$

4. Käyttäen Karush-Kuhn-Tucker -lausetta, ratkaise tehtävä

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 1 = \min! \\ g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = x_1^2 - 4 \leq 0. \end{cases}$$

5. (a) Esitä lyhyesti sakkofunktiomenetelmän idea. Sakkofunktioina voidaan käyttää esimerkiksi itseisarvosakkofunktiota tai Courant-Beltram sakkofunktiota. Miksi näistä kahdesta Courant-Beltramin sakkofunktio on yleensä parempi valinta sakkofunktioksi?

(b) Ratkaise tehtävä

$$\begin{cases} \text{minimoi } f(x,y) = x^2 + y^2 \\ \text{rajoittein } g(x,y) = 1 - x - y \leq 0, \quad (x,y) \in \mathbb{R}^2, \end{cases}$$

sakkofunktiomenetelmällä käyttäen Courant-Beltramin sakkofunktiota.