

Optimointiteoria

Loppukoe, 16.12.2010

1. Teollisuuslaitos tuottaa kahta mallia sylintereitä: S1, S2. Materiaaleja tarvitaan kolmea eri tyyppiä; M1, M2, M3, kumpaankin sylinteriin seuraavan taulukon mukaisesti.

Tarvittavien materiaalien määrä/päivä

Syl.	M1	M2	M3
S1	1	1	2
S2	5	2	1

Materiaaleja on saatavilla seuraavasti:

M1	M2	M3
45	21	24

Voittoa saadaan 4 euroa/sylinteri S1 ja 3 euroa/sylinteri S2. Kuinka monta sylinteriä S1 ja S2 on tuotettava päivässä, jotta voitto maksimoituisi.

2. Olkoon $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c, x \in \mathbb{R}^n$. Tarkastellaan standardimuotoista lineaarisen optimoinnin tehtävää

$$(LP) \quad \begin{cases} c^T x = \min!, \\ Ax = b, \quad x \geq 0, \end{cases}$$

missä $m < n$ ja $\text{rank}(A) = m$. Olkoon $X \subset \mathbb{R}^n$ tehtävän (LP) käypien ratkaisujen joukko.

(a) Osoita, että joukko X on konvekksi.

(b) Osoita, että jos $x \in X$ on käypä perusratkaisu, niin se on joukon X ääripiste.

3. Olkoon $c > 0$. Tutkitaan geometrisen optimoinnin tehtävää

$$\frac{c}{t_1 t_2 t_3} + 2t_2 t_3 + 2t_1 t_3 + t_1 t_2 = \min!, \quad t_i > 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Määrittää tämän tehtävän duaalitehtävä ja ratkaise sen avulla alkuperäinen tehtävä.

4. Tarkastellaan SD-menetelmää. Osoita, että

(a) peräkkäiset iteraatioaskeleet ovat kohtisuorassa toisiaan vastaan eli

$$(x^{(k+1)} - x^{(k)}) \cdot (x^{(k+2)} - x^{(k+1)}) = 0.$$

(b) jos $\nabla f(x^{(k)}) \neq 0$, niin $f(x^{(k)}) > f(x^{(k+1)})$.

5. Esitä, ilman todistusta, Karush-Kuhn-Tuckerin lauseen gradienttimuoto (määrittele käyttämäsi käsitteet). Ratkaise esittämäsi tulosta käyttäen seuraava tehtävä:

$$\begin{cases} f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 1 = \min! \\ g_1(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0 \\ g_2(x_1, x_2) = x_2 - 1 \leq 0. \end{cases}$$