Optimointiteoria Loppukoe, 23.01.2012.

1. Eräälle alueelle, jonka pinta-ala on 42000 m^2 saa rakentaa kaksi- ja viisikerroksisia taloja. Alueen maaperän kosteuden vuoksi viisikerroksiset talot vaativat tukevammat perustukset, mikä nostaa rakennuskustannuksia. Rakennuttajalla on käytössään rahaa 90 milj. euroa ja työvoimaa 4500 henkilötyökuukautta.

   (a) Kuinka monta kaksi- ja viisikerroksista taloa tulisi rakentaa, jotta niissä olevien asuntojen lukumäärä maksimoituisi, kun kaksikerroksiseen taloon voidaan tehdä 12 ja viisikerroksiseen 30 asuntoa? Muut tarvittavat talokohtaiset tiedot ovat allaolevassa taulukossa.

	5 kerrosta	2 kerrosta
kustannukset (euro)	3 milj.	1 milj.
henkilötyökuukaudet	120	60
pohjan pinta-ala (m^2)	800	600

   (b) Kirjoita (a)-kohdan ongelma standardimuodossa sekä sitä vastaava duaalitehtävä.

2. (a) Määrittele lyhyesti käsitteet:

   (i) kantava hypertaso.

   (ii) konveksin joukon ääripiste.

   (iii) konveksi funktio.

   (b) Olkoon joukko $X \subset \mathbb{R}^n$ konveksi ja $f \in C^1(X)$. Osoita, että tällöin jos

   $$f(x) + \nabla f(x)^T (y - x) \leq f(y), \quad x, y \in X,$$

   niin f on konveksi.

3. Tutkitaan geometrisen optimoinnin tehtävää

   $$\frac{1}{t_1 t_2} + t_1 + t_2 = \min!\,, \quad t_1, t_2 > 0.$$

   Määrää tämän tehtävän duaalitehtävä ja ratkaise sen avulla alkuperäinen tehtävä.

4. Rajoitetussa konveksissa optimoinnissa tarkastellaan tehtävää:

   $$(\mathrm{P}) \qquad \begin{cases} f(x) = \min! \\ g_i(x) \leq 0,\ 1 \leq i \leq m \\ x \in X. \end{cases}$$

   (a) Mitä tarkoitetaan, kun sanotaan, että tehtävä (P) on konsistentti tai superkonsistentti?

   (b) Osoita, että funktion $z \to MP(z)$ määrittelyjoukko $D \subset \mathbb{R}^m$ on konveksi.

   (c) Olkoon

   $$\begin{cases} \sqrt{x^2 + y^2} = \min! \\ x + y \leq 0. \end{cases}$$

   Määrää tätä tehtävää vastaava tehtävä $P(z)$ ja funktio $MP(z)$.