

# Matematiikan perusmetodit/mat.

## Välikoe 3 22.11.2010

EI LASKIMIA, EI TAULUKOITA, EI MATKAPUHELIMIA

1. Olkoon

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\cos(x-2)-1}{(x-2)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}x\right), & \text{kun } x < 2 \\ a, & \text{kun } x = 2 \\ x^2 - 2x - \frac{1}{2}, & \text{kun } x > 2 \end{cases}$$

Voidaanko reaaliluku  $a$  valita siten, että funktio  $f$  on jatkuva pisteessä  $x = 2$ ? (5p)

2. a) Esitä Bolzanon lause.  
b) Osoita, että yhtälöllä

$$2\sqrt{x} + 11 = 3x^2.$$

on ainakin yksi reaalinen ratkaisu.

(5p)

3. Olkoon  $f(x) = \frac{5}{x}$ . Osoita tarkasti (derivaatan määritelmään perustuen), että

$$f'(x) = -\frac{5}{x^2}$$

kaikilla  $x > 0$ .

(5p)

4. a) Esitä Lagrangen väliarvolause.  
b) Olkoot  $r \in \mathbb{Z}$  ja  $r > 1$ . Osoita Lagrangen väliarvolauseen avulla, että

$$(1+x)^r > 1+rx$$

aina, kun  $x > 0$ .

(5p)

5. Osoita tarkasti (funktion raja-arvon määritelmään perustuen), että

$$\lim_{x \rightarrow \infty} -3x^3 - 2x^2 + 5 = -\infty.$$

(5p)

6. Olkoon funktio  $f$  derivoituva välillä  $]a, b[$ . Oletetaan, että  $x_0 \in ]a, b[$  on funktion  $f$  paikallinen maksimikohta. Osoita, että  $f'(x_0) = 0$ .

(5p)

PERUSTELE RATKAISUSI RIITTÄVÄN TARKASTI!