

Matematiikan perusmetodit 2011

9.1.2012, Loppukoe

1. Määrittele funktion raja-arvo pisteessä x_0 ja osoita tarkasti määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - 5x - 8 = -5$$

2. Tutki milloin funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x > 1 \\ a^2, & x = 1 \\ x - (1 - a), & x < 1 \end{cases}$$

raja-arvo pisteessä $x = 1$ on olemassa kun $a \in \mathbb{R}$. Määrä vakio $a \in \mathbb{R}$ siten, että funktio f on jatkuva pisteessä $x = 1$ (mikäli mahdollista).

3. a) Osoita derivaatan määritelmää käyttäen, että $D \sin x = \cos x$
b) Etsi funktion f ääriarvot ja tutki niiden laatua kun

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -\frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

4. Olkoon funktio $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ jatkuva ja lisäksi derivoituva välillä $]a, b[$. Osoita, että jos $f(a) = f(b)$, niin on olemassa sellainen piste $x_0 \in]a, b[$, että $f'(x_0) = 0$ (Rollen lause).

5. Laske integraalit

a) $\int (\sin x)^{10} \cos x \, dx$

b) $\int x^2 e^x \, dx$

c) $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2+1)} \, dx$