

# Matematiikan perusmetodit (10 op)

## 18.6.2012, Loppukoe

1. a) Määrittele funktion  $f$  raja-arvo pisteessä  $x_0 \in \mathbb{R}$ .  
b) Osoita tarkasti määritelmää käyttäen, että

$$\lim_{x \rightarrow 3} 2x^2 - 5x - 8 = -5.$$

2. Tutki milloin funktion

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 3, & x > 1 \\ a^2, & x = 1 \\ x - (1 - a), & x < 1 \end{cases}$$

raja-arvo pisteessä  $x = 1$  on olemassa kun  $a \in \mathbb{R}$ . Määrää vakio  $a \in \mathbb{R}$  siten, että funktio  $f$  on jatkuva pisteessä  $x = 1$  (mikäli mahdollista).

3. a) Osoita derivaatan määritelmää käyttäen, että  $D \sin x = \cos x$   
b) Etsi funktion  $f$  ääriarvot ja tutki niiden laatua kun

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + x, & x < 0 \\ -\frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2 \\ x^2 - 4x + 2, & 2 < x \leq 4 \end{cases}$$

4. Olkoon funktio  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  jatkuva ja lisäksi derivoituva välillä  $]a, b[$ . Osoita, että jos  $f(a) = f(b)$ , niin on olemassa sellainen piste  $x_0 \in ]a, b[$ , että  $f'(x_0) = 0$  (Rollen lause).

5. Laske integraalit

- a)  $\int (-\sin x)^{10} \cos x \, dx$
- b)  $\int x^3 e^x \, dx$
- c)  $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)(x^2 + 1)} \, dx$