

Permutaatiot, kunnat ja Galois'n teoria

Loppukoe 29.10.2012

- Osoita, että $p(x) = [1]x^3 + [1]x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$ on jaoton. Merkitse $\alpha = x + (p(x))$ ja konstruoi laajennus $E = \mathbb{Z}_2[x]/(p(x))$.
Osoita, että α on primitiivinen alkio kunnassa E .
- Tarkastellaan symmetristä ryhmää S_5 . Vastaa (perustelujen kanssa) seuraaviin kysymyksiin:
 - Kuinka monta 4-sykliä ryhmässä S_5 on?
 - Kuinka monta kertalukua kaksi olevaa alkioita ryhmässä S_5 on?
 - Olkoon $\alpha = (1\ 2\ 3\ 4) \in S_5$. Määrää $C_{S_5}(\alpha)$.
- Ratkaise Cardanon kaavan avulla yhtälö
$$x^3 + 6x + 2 = 0.$$
- Todista: Jos p on alkuluku ja $n \geq 1$, niin on olemassa sellainen kunta, jonka kertaluku $= p^n$.
- Olkoon N alternoivan ryhmän A_n ($n \geq 3$) normaali aliryhmä. Tiedetään, että N sisältää ainakin yhden 3-syklin. Osoita, että $N = A_n$.