Pitkittäis- ja paneeliaineistojen analysointi
Tenttikysymykset

2012, Toukokuu 21

1. Havaitaan $(X_{t,i}, Y_{t,i})$, $i = 1, \ldots, N$, $t = 1, 2$, jotka toteuttavat lineaarisen mallin
$$Y_{t,i} = \beta_0 + \beta_1 X_{t,i} + c_i + u_{t,i},$$
missä $E(X_{t,i}u_{t,i}) = 0$ ja c_i on kontrollimuuttuja jota ei havaita. Selvitä, kuinka parametri β_1 voidaan estimoida pienimmän neliösumman menetelmällä.

2. Olkoon
$$Y = X\beta + u,$$
missä Y ja u ovat $T \times 1$ vektoreita, X on $T \times K$-vektori ja β on $K \times T$-vektori. Olkoon $\Omega = E(uu')$. Oletetaan, että $E(X'\Omega^{-1}u) = 0$ ja $\text{rank}(E(X'\Omega^{-1}X)) = K$. Osoita, että
$$\beta = [E(X'\Omega^{-1}X)]^{-1}E(X'\Omega^{-1}Y).$$

3. Olkoon
$$Y_i = X_i\beta + u_i,$$
missä Y_i, u_i ovat $T \times 1$-vektoreita, X_i on $T \times K$-vektori ja β on $K \times 1$-vektori. Oletetaan, että (Y_i, X_i), $i = 1, \ldots, N$, ovat i.i.d. ja
$$\text{rank}(E(X_i'X_i)) = K, \qquad i = 1, \ldots, N.$$
Määrittele järkevä estimaattori matriisille
$$A^{-1}BA^{-1},$$
missä $A = E(X_i'X_i)$ ja $B = E(X_i'u_iu_iX_i)$.

4. Tarkastellaan kiinteitten vaikutusten mallia (fixed effects model)

$$Y_{it} \quad = \quad X_{it}\beta + c_i + u_{it},$$

$t = 1, \ldots, T$, $i = 1, \ldots, N$, missä $Y_{it}, u_{it} \in \mathbf{R}$, X_{it} on $1 \times K$-vektori, β on $K \times 1$-vektori ja $c_i \in \mathbf{R}$. Määrittele kiinteitten vaikutusten muunnos (fixed effects transformation).

5. Olkoon

$$Y_i = X_i\beta + u_i,$$

missä Y_i, u_i ovat $T \times 1$-vektoreita, X_i on $T \times K$-vektori ja β on $K \times 1$-vektori. Oletetaan, että (Y_i, X_i), $i = 1, \ldots, N$, ovat i.i.d.,

$$E(X_i \otimes u_i) = 0,$$

$\Omega = E(u_i u_i')$ on positiivisesti definiitti ja

$$\operatorname{rank}(E(X_i'\Omega^{-1}X_i)) = K,$$

$i = 1, \ldots, N$. Olkoon

$$\hat{\beta}_{SGLS} = \left(\sum_{i=1}^{N} X_i'\Omega^{-1}X_i\right)^{-1} \left(\sum_{i=1}^{N} X_i'\Omega^{-1}Y_i\right).$$

Osoita, että

$$\hat{\beta}_{SGLS} \xrightarrow{p} \beta,$$

kun $N \to \infty$.