

RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT

1. välikoe 8.10.2012

Ei laskimia, ei matkapuhelimia!
Perustele tehtävät riittävästi.

1. a) Gaussin kokonaislukujen joukko on $\mathbb{Z}[i] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}, i^2 = -1\}$.
Osoita, että $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ on renkaan $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ alirengas.
b) Olkoon $M = \{3x + 3yi \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$. Osoita, että M on renkaan $(\mathbb{Z}[i], +, \cdot)$ ideaali.

2. Olkoon $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. Määritellään joukossa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ yhteenlasku

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

ja kertolasku

$$(x_1, y_1) \cdot (x_2, y_2) = (x_1 x_2, y_1 y_2).$$

Osoita, että $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas.

Onko $(\mathbb{R} \times \mathbb{R}, +, \cdot)$ kokonaisalue?

3. a) Määrittele renkaan $(R, +, \cdot)$ alkion a generoima pääideaali (a) . (2p)
b) Olkoon $(R, +, \cdot)$ kommutatiivinen rengas. Osoita, että tällöin (4p)

$$(a) = Ra = \{ra \mid r \in R\}.$$

4. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas.

a) Määrää tekijärenkaan $\mathbb{Z}/(4)$ alkiot ja muodosta näille sekä yhteenlaskutaulu että kertolaskutaulu.

b) Osoita, että $\mathbb{Z}/(4) \cong (\mathbb{Z}_4, +, \cdot)$.