**RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT**

1. välikoe 10.10.2011

1. a) Määrittele alirengas. (2p)

   b) Olkoot $(R, +, \cdot)$ rengas ja $\emptyset \neq S \subseteq R$. Osoita, että $S$ on renkaan $R$ alirengas, jos seuraavat ehdot toteutuvat (4p)
      1. $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$;
      2. $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$;
      3. $1_R \in S$.

2. Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Tiedetään, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että $I = \{2a + 2b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ideaali. Onko $I$ renkaan $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ alirengas?

3. a) Olkoot $(R, +, \cdot)$ ja $(R', \oplus, \odot)$ renkaita. Milloin kuvaus $R \to R'$ on rengashomomorfismi? (2p)

   b) Olkoot $I = \{[0]_8, [4]_8\} \subseteq \mathbb{Z}_8$. Osoita, että $\mathbb{Z}_8/I \cong \mathbb{Z}_4$. (4p)
   (Tässä $\mathbb{Z}_4 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$
   $\mathbb{Z}_8 = \{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}$.)

4. Tiedetään että $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas.

   a) Määrää tämän renkaan eräs ei-triviaali ideaali.
   (Mikä joukko on tarkalleen kyseessä? Perustele!) (2p)

   b) Onko kyseessä maksimaalinen ideaali? (Perustele!) (1p)

   c) Muodosta renkaan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tekijärengas ko. ideaalin suhteen ja esitä "ryhmätaulut" molempien operaatioiden suhteen. (Perustele miksi tekijärengas sisältää vain esittämäsi alkiot.) (3p)