RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT

2. välikoe 1.11.2011

1. a) Olkoon $(K, +, \cdot)$ kunta. Määrittele kunnan K karakteristika char$K$. (2p)

   b) Osoita, että äärellisen kunnan K karakteristika on välttämättä alkuluku. (4p)

2. Olkoot $f(x) = [1]x^4 + [1]x^3 + [1]x + [2]$ ja $g(x) = [2]x^3 + [2]x + [2]$ polynomirenkaan $\mathbb{Z}_3[x]$ polynomeja.

   a) Jaa polynomi $f(x)$ polynomilla $g(x)$. (2p)

   b) Laske syt$(f(x), g(x))$. (2p)

   c) Esitä polynomien $f(x)$ ja $g(x)$ suurin yhteinen tekijä muodossa (2p)

   $$\text{syt }(f(x), g(x)) = a(x)f(x) + b(x)g(x),$$

   missä $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$.

3. a) Olkoot K kunta, $a \in K \setminus \{0_K\}$ ja $f(x) \in K[x]$. (2p)
   Osoita: Polynomi $af(x)$ on jaoton polynomirenkaassa $K[x]$ jos ja vain jos $f(x)$ on jaoton polynomirenkaassa $K[x]$.

   b) Tiedetään, että $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ on kommutatiivinen ryhmä, kun alkioiden yhteenlasku on määritetty seuraavasti: (4p)

   $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

   Näytä, että kertolasku

   $$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd)$$

   tekee ryhmästä $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ neljän alkion kunnan $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

4. a) Miksi $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ on kunta? (1p)

   b) Olkoon $p(x) = x^3 + x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$. Osoita, että polynomi $p(x) = x^3 + x^2 + [1]$ on jaoton polynomi polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$. (1p)

   c) Laajenna kunta $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ kahdeksan alkion kunnaksi käyttämällä jaotonta polynomia $p(x) = x^3 + x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$. (4p)
   Esitä tarkasti kunnan alkiot. Mitä on α^3?