RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT

2. välikoe 5.11.2012

Ei laskimia, ei matkapuhelimia!
Perustele tehtävät riittävästi.

1. a) Määrittele kunta $(K, +, \cdot)$ (2p)

   b) Osoita, että jäännösluokkarengas $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ on kunta tarkalleen silloin, kun n on alkuluku. (4p)

2. Olkoon $p(x) = x^2 + x + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$.

   a) Osoita, että polynomi $p(x)$ on jaoton polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$. (2p)

   b) Suorita kunnalle $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ kuntalaajennus käyttäen jaotonta polynomia $p(x) = x^2 + x + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$. (2p)

   c) Esitä saadun uuden kunnan alkioille ryhmätaulut molempien laskuoperaatioiden suhteen. (2p)

3. a) Olkoot
$$f(x) = [1]x^5 + [3]x^2 + [1]x + [1]$$
ja
$$g(x) = [1]x^3 + [3]x^2 + [2]x + [1]$$
polynomirenkaan $\mathbb{Z}_5[x]$ polynomeja. Laske $\mathrm{syt}(f(x), g(x))$ ja esitä se muodossa $\mathrm{syt}(f(x), g(x)) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$, missä $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$.

   b) Oletetaan, että $q(x)$ ja $f(x)$ ovat keskenään jaottomia polynomirenkaan $K[x]$ polynomeja, ja $q(x) \mid f(x)g(x)$. Osoita, että $q(x) \mid g(x)$.

4. a) Jaa polynomi $f(x) = [1]x^3 + [5]x^2 + [2]x + [3]$ tekijöihin polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_7[x]$.

   b) Tiedetään, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ ideaali.
   Onko $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ kunta? Perustele vastauksesi riittävästi ja täydellisesti.