RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT

Kesätentti 18.6.2012

1. a) Olkoot $(R, +, \cdot)$ rengas ja $\emptyset \neq S \subseteq R$. Osoita, että S on renkaan R alirengas, jos seuraavat ehdot toteutuvat
   1. $a, b \in S \Rightarrow a - b \in S$;
   2. $a, b \in S \Rightarrow ab \in S$;
   3. $1_R \in S$.

   b) Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Tiedetään, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että $I = \{2a + 2b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ideaali. Onko I renkaan $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ alirengas?

2. a) Olkoot $(R, +, \cdot)$ ja $(R', \oplus, \odot)$ renkaita. Milloin kuvaus $R \to R'$ on rengashomomorfismi? (2p)

   b) Olkoot $I = \{[0]_8, [4]_8\} \subseteq \mathbb{Z}_8$. Osoita, että $\mathbb{Z}_8/I \cong \mathbb{Z}_4$. (4p)
   (Tässä $\mathbb{Z}_4 = \{[0]_4, [1]_4, [2]_4, [3]_4\}$
   $\mathbb{Z}_8 = \{[0]_8, [1]_8, [2]_8, [3]_8, [4]_8, [5]_8, [6]_8, [7]_8\}$.)

3. Olkoot $f(x) = [1]x^4 + [1]x^3 + [1]x + [2]$ ja $g(x) = [2]x^3 + [2]x + [2]$ polynomirenkaan $\mathbb{Z}_3[x]$ polynomeja.

   a) Jaa polynomi $f(x)$ polynomilla $g(x)$.

   b) Laske syt$(f(x), g(x))$.

4. a) Osoita, että äärellisen kunnan K karakteristika on välttämättä alkuluku.

   b) Tiedetään, että $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ on kommutatiivinen ryhmä, kun alkioiden yhteenlasku on määritetty seuraavasti:

   $$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d).$$

   Näytä, että kertolasku

   $$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd)$$

   tekee ryhmästä $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +)$ neljän alkion kunnan $(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2, +, \cdot)$.

5. a) Olkoon $p(x) = x^3 + x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$. Osoita, että polynomi $p(x) = x^3 + x^2 + [1]$ on jaoton polynomi polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$. (2p)

   b) Laajenna kunta $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ kahdeksan alkion kunnaksi käyttämällä jaotonta polynomia $p(x) = x^3 + x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$. (4p)
   Esitä tarkasti kunnan alkiot. Mitä on α^3?