RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT

Loppukoe 2.4.2012

Ei laskimia, ei matkapuhelimia!

1. Olkoot $f(x) = [2]x^4 + [2]x^3 + [2]x + [1]$ ja $g(x) = [1]x^3 + [1]x + [1]$ polynomirenkaan $\mathbb{Z}_3[x]$ polynomeja.
   a) Jaa polynomi $f(x)$ polynomilla $g(x)$. (3p)
   b) Laske syt$(f(x), g(x))$. (3p)
   c) Esitä polynomien $f(x)$ ja $g(x)$ suurin yhteinen tekijä muodossa (2p)
   $$\text{syt}\ (f(x), g(x)) = a(x)f(x) + b(x)g(x),$$
   missä $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_3[x]$.

2. a) Määrittele alirengas. (2p)
   b) Määrittele ideaali. (2p)
   c) Olkoon $\mathbb{Z}[\sqrt{3}] = \{a + b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$. Tiedetään, että $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ on rengas. Osoita, että $I = \{2a + 2b\sqrt{3} | a, b \in \mathbb{Z}\}$ on renkaan $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ ideaali. Onko I renkaan $(\mathbb{Z}[\sqrt{3}], +, \cdot)$ alirengas? (4p)

3. Olkoon $f : (R, +, \cdot) \to (R', \oplus, \odot)$ rengashomomorfismi. Määritellään kuvaus $F : R/\text{Ker}(f) \to \text{Im}(f)$ s.e $F(r + \text{Ker}(f)) = f(r)$. Osoita, että kuvaus F on rengasisomorfismi. (8p)

4. a) Miksi $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ on kunta? (2p)
   b) Olkoon $p(x) = x^3 + x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$. Osoita, että polynomi $p(x) = x^3 + x^2 + [1]$ on jaoton polynomi polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_2[x]$. (2p)
   c) Laajenna kunta $(\mathbb{Z}_2, +, \cdot)$ kahdeksan alkion kunnaksi käyttämällä jaotonta (4p) polynomia $p(x) = x^3 + x^2 + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$. Esitä tarkasti kunnan alkiot. Mitä on α^3?

5. a) Määrittele renkaan $(R, +, \cdot)$ alkion a generoima pääideaali (a). (2p)
   b) Olkoon $(R, +, \cdot)$ kommutatiivinen rengas ja $a \in R$. Osoita, että tällöin $(a) = Ra$. (6p)