RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT

Loppukoe 10.12.2012

Ei laskimia, ei matkapuhelimia!
Perustele tehtävät riittävästi.

1. Määrittele seuraavat käsitteet:
   a) Rengas $(R, +, \cdot)$. (3p)
   b) Kokonaisalue $(R, +, \cdot)$. (2p)
   c) Kunta $(K, +, \cdot)$. (3p)

2. a) Osoita, että jäännösluokkarengas $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ on kunta tarkalleen silloin, kun n on alkuluku.
   b) Osoita, että äärellisen kunnan K karakteristika on välttämättä alkuluku.

3. a) Olkoot
$$f(x) = [1]x^5 + [8]x^3 + [8]x^2 + [4]x + [7]$$
ja
$$g(x) = [1]x^3 + [2]x^2 + [5]x + [10]$$
polynomirenkaan $\mathbb{Z}_{11}[x]$ polynomeja. Laske $\mathrm{syt}(f(x), g(x))$.
   b) Osoita, että polynomi
$$p(x) = [1]x^3 + [1]x + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$$
on jaoton. Laajenna kunta $\mathbb{Z}_2$ suuremmaksi kunnaksi polynomin $p(x)$ avulla. Oletetaan, että tässä laajennuskunnassa $p(\alpha) = 0$. Esitä laajennuskunnan nolla-alkiosta eroavat alkiot alkion α potensseina.

4. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas.
   a) Määrää renkaalle $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ jokin ei-triviaali ideaali I.
   b) Määrää tekijärenkaan $\mathbb{Z}/I$ alkiot ja muodosta näille sekä yhteenlaskutaulu että kertolaskutaulu. (Huom: I on a)-kohdassa määräämäsi ideaali.)
   c) Osoita, että määräämäsi tekijärengas $\mathbb{Z}/I$ on isomorfinen jonkin jäännösluokkarenkaan kanssa.
   d) Onko määräämäsi tekijärengas $\mathbb{Z}/I$ kunta? Perustele erittäin lyhyesti.