RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT

Loppukoe 12.11.2012

Ei laskimia, ei matkapuhelimia!
Perustele tehtävät riittävästi.

1. a) Olkoon $F = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$. Osoita, että $(F, +, \cdot)$ on kunta. Huomaa, että $F \subset \mathbb{R}$ ja $\mathbb{R}$ on kunta.

   b) Osoita, että polynomi
$$p(x) = [1]x^3 + [1]x + [1] \in \mathbb{Z}_2[x]$$
   on jaoton. Laajenna kunta $\mathbb{Z}_2$ suuremmaksi kunnaksi polynomin $p(x)$ avulla. Oletetaan, että tässä laajennuskunnassa $p(\alpha) = 0$. Esitä laajennuskunnan nolla-alkiosta eroavat alkiot alkion α potensseina.

2. a) Osoita, että $I = \{[0], [3], [6], [9]\}$ on renkaan $\mathbb{Z}_{12}$ ideaali. Onko $(\mathbb{Z}_{12}/I, +, \cdot)$ kunta? Perustele vastauksesi riittävästi ja täydellisesti.

   b) Olkoot
$$f(x) = [1]x^5 + [8]x^3 + [8]x^2 + [4]x + [7]$$
   ja
$$g(x) = [1]x^3 + [2]x^2 + [5]x + [10]$$
   polynomirenkaan $\mathbb{Z}_{11}[x]$ polynomeja. Laske $\mathrm{syt}(f(x), g(x))$ ja esitä se muodossa $\mathrm{syt}(f(x), g(x)) = a(x)f(x) + b(x)g(x)$, missä $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$.

3. a) Olkoon $(R, +, \cdot)$ kommutatiivinen rengas, jonka ainoat ideaalit ovat (0) ja R. Osoita, että tällöin $(R, +, \cdot)$ on kunta.

   b) Olkoon $(R, +, \cdot)$ kommutatiivinen rengas. Osoita, että tällöin
$$(a) = Ra = \{ra | r \in R\}.$$

4. $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on rengas.

   a) Onko $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ kokonaisalue? Miksi? (2p)

   b) Määrää tekijärenkaan $\mathbb{Z}/(6)$ alkiot ja muodosta näille sekä yhteenlaskutaulu että kertolaskutaulu. (3p)

   c) Osoita, että $\mathbb{Z}/(6) \cong (\mathbb{Z}_6, +, \cdot)$. (3p)