**RENKAAT, KUNNAT JA POLYNOMIT**

Loppukoe 13.2.2012

Ei laskimia, ei matkapuhelimia!

1. a) Määrittele rengashomomorfismi, rengasisomorfismi, joukot $\mathrm{Ker} f$ ja $\mathrm{Im} f$. (4p)

   b) Osoita, että $\mathbb{Z}/(5) \cong \mathbb{Z}_5$. (4p)

2. a) Osoita, että kunnan $(K, +, \cdot)$ ainoat ideaalit ovat $(0)$ ja $K$. (3p)

   b) Olkoon $(R, +, \cdot)$ kommutatiivinen rengas, jonka ainoat ideaalit ovat $(0)$ ja $R$. Osoita, että tällöin $(R, +, \cdot)$ on kunta. (5p)

3. Tiedetään että $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ on kommutatiivinen rengas.

   a) Määrää renkaan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ eräs alirengas. (Perustele miksi on alirengas!) (2p)

   b) Määrää renkaan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ eräs ei-triviaali ideaali. (Perustele miksi on ideaali!) (2p)

   c) Onko kyseessä maksimaalinen ideaali? (Perustele!) (1p)

   d) Muodosta renkaan $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$ tekijärengas ko. ideaalin suhteen ja esitä "ryhmätaulut" molempien operaatioiden suhteen. (3p)

4. a) Miksi $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ on kunta? (1p)

   b) Olkoon $p(x) = x^2 + [2]x + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$. Osoita, että polynomi $p(x) = x^2 + [2]x + [2]$ on jaoton polynomi polynomirenkaassa $\mathbb{Z}_3[x]$. (3p)

   c) Laajenna kunta $(\mathbb{Z}_3, +, \cdot)$ yhdeksän alkion kunnaksi käyttämällä jaotonta polynomia $p(x) = x^2 + [2]x + [2] \in \mathbb{Z}_3[x]$. (4p)
   Esitä tarkasti kunnan alkiot. Mitä on $\alpha^2$?