

Sarja ja integraali

Loppukoe, 18.6.2012

Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.

1. Tutki, esimerkiksi suppenemistestien avulla, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)}}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^2}.$$

2. Osoita, että funktio

$$f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{kun } x \in [-1, 0], \\ -1 & \text{muulloin,} \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä $[-1, 1]$ ja määrää $\int_0^2 f(x) dx$.

3. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^2} dx$$

itseisesti, ehdollisesti vai ei lainkaan.

4. Laske funktion $f(x) := \sin(2x^3)$ kertaluvun 603 derivaatta pisteessä $x = 0$.
5. Onko olemassa funktiojono (f_n) , $f_n: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \dots$, jossa kaikki funktiot f_n ovat väheneviä ja epäjatkuvia mutta joka suppenee kohti jatkuvaa funktiota $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.