

Sarjat ja integraalit

Loppukoe, 16.5.2011

Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.

1. Tutki, esimerkiksi suppenemistestien avulla, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k(k+1)(k+2)}}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\sin k)^k}{1+k^3}.$$

2. a) Olkoon $f: [-2, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Laske ylä- ja alasumma S_D ja s_D jaolle $D = \{-2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\}$.

b) Päättele, että funktio

$$f: [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{kun } x \in [0, 1], \\ 1+x & \text{muulloin} \end{cases}$$

on Riemann-integroituva välillä $[0, 3]$ ja laske $\int_0^3 f(x) dx$. (Kannattaa piirtää kuva!)

3. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle $|f(x) - f(y)| \leq L\sqrt[3]{|x-y|}$, missä $L > 0$ on vakio. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva joukossa \mathbb{R} .

4. Tutki, millä $s \in \mathbb{R}$ integraali

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + \sqrt{x}}{x^s} dx$$

suppenee.

5. Millä $x \in \mathbb{R}$ sarja

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k2^k}$$

suppenee?