

## Sarjat ja Integraalit

Loppukoe 26.11.2012

**Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.**

1. Tutki, esimerkiksi suppenemistestien avulla, suppenevatko sarjat

$$\text{a) } \sum_{k=1}^{\infty} \ln\left(\frac{k^2}{k^2 + 2k + 1}\right) \quad \text{b) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\cos(2k + 1))^k}{k^3 + 3}.$$

2. Perustele määritelmään nojautuen, onko funktio

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{kun } x \in [-2, -1], \\ x, & \text{kun } x \in [-1, 1], \\ 1, & \text{kun } x \in [1, 2], \end{cases}$$

Riemann-integroituva välillä  $[-2, 2]$ .

3. Onko funktio  $f$  tasaisesti jatkuva välillä  $I$ , kun

(a)  $f(x) = x^2$  ja  $I = ]0, 1[$ ?

(b)  $f(x) = 2 + \sin(3x + 1)$  ja  $I = \mathbb{R}$ ?

Perustele vastauksesi.

4. Laske funktion  $f(x) = \cos(4x^2)$  kertaluvun 999 derivaatta pisteessä  $x = 0$ . Perustele vastauksesi.

5. Anna esimerkki funktiojonosta  $(f_n)$ ,  $f_n : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , jossa kaikki funktiot  $f_n$  ovat aidosti kasvavia ja epäjatkuvia, mutta jono  $(f_n)$  suppenee tasaisesti kohti jatkuvaa funktiota.