

Sarjat ja integraali

Loppukoe, 25.11.2011

Kokeessa saa käyttää luentomonistetta ja luentomuistiinpanoja.

1. Tutki, esimerkiksi suppenemistestien avulla, suppenevatko sarjat

$$(a) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)^{1/2}}, \quad (b) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{1+k^3}.$$

2. Perustele määritelmään nojautuen, onko funktio

$$f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x = \frac{1}{n} \text{ jollakin } n \in \mathbb{Z}, \\ -x & \text{muulloin} \end{cases}$$

jatkuva pisteessä $x_0 = 0$.

3. Olkoon $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funktio, jolle $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|^{\frac{1}{2}}$, jollakin vakiolla $L > 0$. Osoita, että f on tasaisesti jatkuva joukossa \mathbb{R} .

4. Tutki suppeneeko integraali

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{1+x^2} dx$$

itseisesti, ehdollisesti vai ei lainkaan.

5. Määrää sarjan $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k x^{2k+1}$ suppenemissäde ja summafunktio.