

Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitos

806631S SATUNNAISMUUTTUJAT JA JAKAUMAT, sl 2012 (EL & MS)

Välikoe 1, ma 29.10.2012 klo 14-18

*Ei omia muistiinpanoja paperilla eikä laskimessa, joka muutoin saa olla mukana.*

*Tässä tehtäväpaperissa on neljä (4) tehtävää. Liitteenä on taulukko tärkeimmistä diskreeteistä ja jatkuvista jakaumamalleista, jonka sisältämiin tietoihin voi tarvittaessa ja perustellen nojautua.*

1. Satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa khiin neliöjakaumaa vapausasteluvulla 2, eli  $X \sim \chi^2(2)$ .  
Olkoon  $Y = \sqrt{X}$ .

- (a) Johda satunnaismuuttujan  $Y$  jakauman tiheysfunktion lauseke.
- (b) Johda satunnaismuuttujan  $Y$  jakauman kvantiilifunktion lauseke ja määrää  $Y$ :n mediaani.

2. Satunnaismuuttuja  $X$  noudattaa binomijakaumaa  $\text{Bin}(n, \pi)$ , jossa  $n \in \mathbb{N}_+$  ja  $0 < \pi < 1$ .  
Olkoon  $Y = \log(X/n)$  suhteellisen osuuden  $X/n$  logaritimuunnos.

- (a) Laske delta-menetelmällä 1. kertaluvun approksimaatio odotusarvolle  $\mathbb{E}(Y)$  ja varianssille  $\text{var}(Y)$ .
- (b) Laske 2. kertaluvun approksimaatio odotusarvolle  $\mathbb{E}(Y)$ . Millaisissa tilanteissa 2. kertaluvun termin vaikutus approksimaation tarkkuuteen alkaa olla häviävän pieni?
- (c) Ovatko  $\mathbb{E}(Y)$  ja  $\text{var}(Y)$  olemassa? Perustele!

3. Olkoon  $X = (Y, Z)$  satunnaismuuttujapari, jonka momenttigeneroivan funktion  $M : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  lauseke on

$$M(t, u) = \exp \{ \alpha(e^t - 1) + \beta(e^u - 1) + \gamma(e^{t+u} - 1) \}, \quad (t, u) \in \mathbb{R}^2,$$

jossa  $\alpha, \beta$  ja  $\gamma$  ovat positiivisia reaaliarvoja.

- (a) Mitkä ovat koordinaattimuuttujien  $Y$  ja  $Z$  standardoitujen kumulanttien  $\gamma_1 = \kappa_3/\kappa_2^{3/2}$  ja  $\gamma_2 = \kappa_4/\kappa_2^2$  arvot?
- (b) Johda  $Y$ :n ja  $Z$ :n korrelaatiokertoimen arvo.

4. Satunnaisvektorille  $X = (Y, Z)$  pätee, että  $Y \sim \text{Tas}(0,1)$  ja ehdolla  $Y = y$  on  $Z$ :n jakauma  $\text{Bin}(n, y)$ .

- (a) Johda  $Z$ :n reunajakauman pistetodennäköisyysfunktio.
- (b) Johda ehdollisen odotusarvon  $\mathbb{E}(Y|Z)$  lauseke.