Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitos

806631S SATUNNAISMUUTTUJAT JA JAKAUMAT, sl 2012 (EL & MS)

Välikoe 2, ma 7.1.2013 klo 14–18 L1

Huom. *Vastaa kaikkiin tehtäviin. Ei omia muistiinpanoja paperilla eikä laskimessa, joka muutoin saa olla mukana. Tarvittavat taulukot tehtäväpaperin liitteenä.*

1. Olkoot $U_1, U_2, \ldots$ toisistaan riippumattomia satunnaismuuttujia ("satunnaisotos"), joista kukin $U_i \sim \mathrm{Tas}(0,1)$, $i \in \mathbb{N}_+$. Olkoon edelleen $X_n = \min\{U_1, \ldots, U_n\}$ kaikilla $n \in N_+$.

(a) Johda satunnaismuuttujan X_n kertymäfunktion lauseke kullekin n ja osoita sen avulla, että $X_n \xrightarrow{d} 0$, kun $n \to \infty$.

(b) Olkoon $Y_n = nX_n$. Osoita, että $Y_n \xrightarrow{d} Y$, jossa Y on eksponenttijakautunut.

2. Tarkastellaan jatkuvasti jakautunutta satunnaisvektoria $X = (X_1, X_2) : \Omega \to R^2$, jonka jakauman momenttigeneroiva funktio jok. $t = (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2$ on muotoa

$$M_X(t_1, t_2) = \exp\{0.25(4t_1^2 + 2t_2^2 - 2t_1t_2 - t_2)\}$$

Mikä jakauma on kyseessä? Johda X:n odotusarvovektori $\mathbb{E}(X)$ ja kovarianssimatriisi Σ. Laske myös korrelaatiokerroin $\varrho_{12} = \mathrm{cor}(X_1, X_2)$.

3. Olkoon Markovin ketjun siirtymämatriisi $\mathbf{P}$ seuraavanlainen

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 & 0.1 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}.$$

(a) Onko ketju ergodinen? Perustele.

(b) Kumpi seuraavista kahdesta rivivektorista kuvaa tämän Markovin ketjun tasapainojakaumaa? Perustele vastauksesi.

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} \frac{21}{62} & \frac{23}{62} & \frac{18}{62} \end{bmatrix} \quad \text{vai} \quad \pi_2 = \begin{bmatrix} \frac{21}{62} & \frac{15}{62} & \frac{26}{62} \end{bmatrix}$$

4. Johda hylkäysmenetelmän avulla simulointialgoritmi jakaumalle, jonka tiheysfunktion muoto on normalisointivakiota vaille $f(x) \propto \exp(-x)/(1+x^2)$, $x > 0$. Käytä ehdotusjakaumana eksponenttijakaumaa odotusarvolla yksi (tiheysfunktio $g(x) = \exp(-x)$, $x > 0$).

Liitteet. Yksiulotteisten jakaumien taulukko seuraavilla sivuilla. Moniulotteista normaalijakaumaa odotusarvovektorilla $\mu \in \mathbb{R}^p$ ja positiivisesti definiitillä kovarianssimatriisilla $\Sigma \in \mathbb{R}^{p\times p}$ noudattavan satunnaisvektorin $X : \Omega \to \mathbb{R}^p$ tiheysfunktion $f(x)$ ja momenttigeneroivan funktion $M(t)$ lausekkeet ovat

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2}\sqrt{\det(\Sigma)}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(x-\mu)^{\mathrm{T}}\Sigma^{-1}(x-\mu)\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^p$$

$$M(t) = \exp\left(\mu^{\mathrm{T}}t + \frac{1}{2}t^{\mathrm{T}}\Sigma t\right), \quad t \in \mathbb{R}^p$$