Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitos/tilastotiede

805310A TILASTOLLINEN PÄÄTTELY I, kl 2010 (E. Ollila)

Loppuntentti, Ma 8.8.2011 klo 12-16

Muistiinpanoja ei saa olla mukana. Laskin saa olla mukana! Vastaa jokaiseen NELJÄÄN tehtävään!

1. Eräällä tieosuudella tietyn havaintopisteen 10 sekunnin aikana ohittavien autojen lukumäärä Y noudattaa Poissonin jakaumaa parametrilla $\lambda = \mathbb{E}(Y)$, jonka tunnettu pistetodennäköisyysfunktio siis on
$$f(y;\lambda) = \mathbb{P}(Y = y;\lambda) = \frac{1}{y!}\lambda^y e^{-\lambda}.$$
Ohittavien autojen lukumäärä erillisillä aikaväleillä oletetaan riippumattomiksi. Seuraavassa taulussa on raportoitu 300 (10 sekunnin aikavälillä tehtyä) havaintoa

Autojen lkm	0	1	2	3	4	5	Yht.
Frekvenssi m_k	61	107	76	45	10	1	300

Frekvenssitaulua voidaan mallintaa multinomijakaumalla:
$$f(m) = c \cdot p_0^{m_0} p_1^{m_1} \cdots p_5^{m_5}$$
jossa c on (uskottavuuspättelyn kannalta epäolennainen) vakiokerroin, p_k:t ovat luokkien todennäköisyydet ja m_k havaitut frekvenssit ($k = 0, 1, \ldots, 5$).

   (a) Laske λ:n suurimman uskottavuuden estimatti $\hat{\lambda}$ ja havaittu informaatio $j(\hat{\lambda})$. Perustele, että SU on globaali maksimi!

   (b) Laske logaritminen suhteellinen uskottavuusfunktio $r(\lambda) = l(\lambda) - l(\hat{\lambda})$. Onko parametrin arvo $\lambda = 1$ mielestäsi uskottava? Perustele vastauksesi.

2. Eräs teollisuusprosessi tuottaa vaihtelevanmittaisia kuituja. Kuidun pituuden (Y) oletetaan noudattavan jakaumaa, jonka tiheysfunktio on
$$f(y;\theta) = \frac{1}{\theta^2} y e^{-y/\theta}, \quad y > 0$$
missä $\theta > 0$ on tuntematon parametri. Olkoon n satunnaisesti valitun kuidun pituudet $y_1, \ldots, y_n$.

   (a) Johda θ:n SU-estimaatin $\hat{\theta}$, informaatiofunktion $j(\theta)$ sekä logaritmisen suhteellisen uskottavuusfunktion $r(\theta) = l(\theta) - l(\hat{\theta})$ lausekkeet.

   (b) Olkoon $n = 6$:n satunnaisesti valitun kuidun pituudet
$$6.40,\ 3.15,\ 3.00,\ 5.50, 4.25,\ 6.90.$$
   Tutki LR-testisuureen $D = -2r(\theta_0)$ ja sen χ_1^2 approksimaation avulla hypoteesia, että parametrin θ arvo on $\theta_0 = 1$. Kerrottakoon, että χ_1^2-jakauman 0.95 ja 0.99 kvantiilit ovat 3.841 ja 6.634.

3. Uuden muovilaadun kestävyyttä tutkittiin lyömällä koepalaa toistuvasti vasaralla, kunnes se rikkoutuu. Oletetaan, että rikkoutumistodennäköisyys on jokaisella lyönnillä θ ja että se ei riipu aikaisempien lyöntien määrästä. Olkoon satunnaismuuttuja Y tarvittavien lyöntien lukumäärä ennen onnistunutta (koepalan rikkoavaa) lyöntiä. Kun n koepalaa testattiin riippumattomasti saatiin havainnoksi $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$.

   (a) Muotoile sopiva todennäköisyysmalli Y:lle.

   (b) Laske otokseen $\mathbf{y}$ pohjautuva parametrin θ uskottavuusfunktio $L(\theta)$, SUE $\hat{\theta}$ ja havaittu informaatio $j(\hat{\theta})$.

   (c) Mikä on parametrin θ harhattoman estimaattorin $\hat{\theta}(\mathbf{y})$ pienin mahdollinen varianssi (Cramér-Rao alaraja). Voit käyttää hyväksesi tietoa, että satunnaismuuttujan Y odotusarvo on $(1-\theta)/\theta$.

   (d) EXTRA tehtävä (jonka tekemällä oikein voit saada yhden lisäpisteen): Osoita, että SUE $\hat{\theta}$ on θ:n tyhjentävä tunnusluku.

4. Olkoot $Y_1, \ldots, Y_n$ iid otos $\mathrm{Exp}(1/\lambda)$ jakaumasta (joka vastaa $\mathrm{Gam}(1, 1/\lambda)$ jakaumaa), jonka tiheysfunktio siis on

$$f(y;\lambda) = \lambda e^{-\lambda y}, \quad y > 0$$

   ja parametri $\lambda > 0$.

   (a) Testataan hypoteesia

$$H_0 : \lambda = 1 \quad \text{vastaan} \quad H_1 : \lambda = 2.$$

   Johda voimakkaimman testin $\lambda(\mathbf{Y}) = L(1;\mathbf{Y})/L(2;\mathbf{Y})$ kriittinen alue ja selitä miten valitset vakion joka määrää tason $\alpha = 0.05$ testin kriittisen alueen rajan.

   (b) Testataan nollahypoteesia

$$H_0 : \lambda = \lambda_0 \quad \text{vastaan} \quad H_1 : \lambda \neq \lambda_0.$$

   Johda Raon pistemääräsuureen $U = s(\lambda_0;\mathbf{Y})^2/I(\lambda_0)$ lauseke. Muistutettakoon, että $I(\lambda) = E[j(\lambda;\mathbf{Y})]$ on parametrin λ Fisher informaatio.