Tenttikysymykset
Tilastollinen päättely II

2011, Syyskuu 19

1. Määrittele (a) stokastinen konvergenssi ja (b) jakaumakonvergenssi.

2. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n$ riippumattomia satunnaismuuttujia, joiden kumulantit generoivat funktiot ovat $K_1, \dots, K_n$. Osoita, että satunnaismuuttujan $\sum_{j=1}^n Y_j$ kumulantit generoiva funktio on

$$K(t) = \sum_{j=1}^{n} K_j(t).$$

3. Olkoot $Y_1, \dots, Y_n \in \mathbf{R}$ riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia, joiden tiheysfunktio on $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Määritellään ydinestimaattori tihysfunktion arvolle $f(y)$, missä $y \in \mathbf{R}$, kaavalla

$$\hat{f}(y) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} K_h(x - Y_i),$$

missä $K_h(y) = K(y/h)/h$, $K : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja $h > 0$. Osoita, että

$$\mathrm{Var}\left(\hat{f}(y)\right) \leq \frac{1}{n} \int_{-\infty}^{\infty} K_h^2(y - x) f(x)\, dx.$$

4. Olkoon
$$f(y, \theta) = \exp\{s(y)\theta - \kappa(\theta) + c(y)\}$$
tiheysfunktio, missä $y \in \mathbf{R}$ ja $\theta \in \mathbf{R}$. Olkoon $Y = (Y_1, \dots, Y_n)$ i.i.d. otos tiheysfunktion $f(y, \theta)$ jakaumasta. Osoita, että Neyman-Pearsonin lemman mukainen testi hypoteeseille

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$

$$H_1 : \theta = \theta_1,$$

missä $\theta_1 > \theta_0$, on testi, jonka kriittinen alue on

$$\mathcal{Y} = \left\{ y = (y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} s(y_j) \geq t'_\alpha \right\},$$

missä t'_α on valittu siten, että testin koko on α.

5. Tiedetään, että kun $Y_1, \ldots, Y_n$ ovat riippumattomia ja samoin jakautuneita satunnaismuuttujia joilla on tiheysfunktio $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ ja kertymäfunktio $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, niin r:nnen järjestystunnusluvun $Y_{(r)}$ tiheysfunktio on
$$f_{Y_{(r)}}(y) = \frac{n!}{(n-r)!(r-1)!} F(y)^{r-1} f(y)(1 - F(y))^{n-r}.$$
Olkoot $U_1, \ldots U_n$ riippumattomia ja samoin jakautuneita välillä $[0, 1]$ tasaisesti jakautuneita satunnaismuuttujia.

   (a) Mikä on r:nnen järjestystunnusluvun $U_{(r)}$ tiheysfunktio?

   (b) Laske $EU_{(r)}$.