Oulun yliopiston matemaattisten tieteiden laitos/tilastotiede

806113P TILASTOTIETEEN PERUSTEET A (Esa Läärä)

Loppukuulustelu 14.3.2011 klo 14-18 L1

Mukana ei saa olla omia muistiinpanoja eikä mitään kirjallista materiaalia. Laskimen käyttö sallittu. Tarvittavat kaavat ja taulukot ovat tämän tehtäväpaperin liitteinä 2–4.

Tehtäviä on viisi (5) alakohtineen, pisteitä 0–6 per tehtävä; koko tentin maksimipistemäärä 30. VASTAA JOKAISEEN TEHTÄVÄÄN.

1. Määrittele tiiviisti seuraavat käsitteet, periaatteet tai menetelmät:

(a) järjestysasteikko (1 p.),

(b) satunnaisotanta (2 p.),

(c) laatikko-janakuvio (1 p.),

(d) estimaattorin otantajakauma (2 p.).

2. Erään keskisuuren yrityksen työntekijöiden kuukausipalkat jakautuivat seuraavasti.

palkka (euroa)	1500-1999	2000-2499	2500-3499	3500-4999	5000-6999	Yhteensä
työntekijöitä	3	23	15	7	2	50

(a) Esitä kuukausipalkkojen jakauma graafisesti histogrammin avulla ja arvioi graafisesti jakauman moodi. (3 p.)

(b) Piirrä jakauman summakäyrä ja arvioi graafisesti mediaanin sekä kvartiilien arvoja. (3 p.)

Huom. Rahasummat pyöristetään tavallisesti lähimpään alempaan euromäärään.

3. *Helsingin Sanomat* kertoi uutisessaan 18.2. tuloksista, jotka saatiin TNS Gallupin tammihelmikuussa suorittamassa puoluekannatusmittauksessa (ks. LIITE 1). Sen mukaan niiden haastateltujen joukossa, jotka ilmaisivat aikovansa äänestää ensi eduskuntavaaleissa jotain puoluetta, 22% kertoi aikovansa äänestää kansallista kokoomusta.

(a) Laske 95% luottamusväli eli "virhemarginaali" kokoomuksen tuntemattomalle kannatusosuudelle koko äänestäjäkunnassa. (3 p.)

(b) Liitteen alanurkassa otsikon **Mikä on virhemarginaali?** alla yritetään selostaa virhemarginaalin merkitystä. Lue tämä teksti huolellisesti. Kuvaako siinä annettu luonnehdinta mielestäsi oikein luottamusvälin (esim. annetulla luottamustasolla 95%) käsitettä ja ominaisuuksia? Perustele. (3 p.)

4. *Helsingin Sanomat* julkaisi verkkosivullaan 1.3.2011 klo 21.50 seuraavan uutisen (ks. `http://www.hs.fi/ulkomaat/artikkeli/P%C3%A4iv%C3%A4nokoset+alentavat+verenpainetta/1135264195275`):

Päivänokoset alentavat verenpainetta

Stressaavien tehtävien jälkeen otetut nokoset palauttavat verenpaineen ennalleen.

Päiväunet voivat auttaa kohonneen verenpaineen hallinnassa. Tuoreen tutkimuksen mukaan noin tunnin nokkaunet stressitestin jälkeen alensi opiskelijoiden verenpainetta.

Yhdysvaltalaisessa Allegheny Collegen tutkimuksessa oli mukana 85 tervettä yliopisto-opiskelijaa, jotka jaettiin torkkuryhmään ja verrokkeihin.

Koehenkilöt täyttivät ensin kyselylomakkeen, jossa selvitettiin kuinka paljon he yleensä nukkuvat yöllä, minkä jälkeen heidän verenpaineensa ja pulssinsa mitattiin stressitestiä ennen ja sen jälkeen. Stressitestiin sisältyi muiden muassa matemaattisia "aivopähkinöitä", jotka vaativat ajattelua.

Mittaukset osoittivat, että verenpaine nousi ja pulssi kiihtyi molemmissa ryhmissä stressitestin aikana.

Stressitestin jälkeen toinen ryhmä sai mahdollisuuden ottaa tunnin päivänokoset. Kun koehenkilöiltä tämän jälkeen mitattiin verenpaine uudestaan, se oli laskenut huomattavasti enemmän torkkuryhmällä kuin valveilla olleilla.

"Tutkimuksemme osoittaa, että 45–60 minuutin torkut palauttavat stressin aiheuttamat muutokset sydämessä ja verisuonistossa ennalleen", tiivistää tutkimusta johtanut Ryan Brindle.

Tutkimuksen julkaisi International Journal of Behavioral Medicine.

Vastaa uutisen pohjalta seuraaviin kysymyksiin.

(a) Miten muotoilisit konkreettisesti tutkimuksen tavoitteen tai pääkysymyksen? Onko tutkimus pääkysymyksensä osalta luonteeltaan kuvaileva vai syy-seuraussuhdetta koskeva? Millainen on mielestäsi tutkimuksen kohdepopulaatio? (2 p.)

(b) Uutisessa ei kerrota, millä periaatteella koehenkilöt jaettiin koeryhmään ("torkkuryhmä"), jolle annettiin mahdollisuus ottaa stressitestin jälkeen tunnin päivänokoset, ja vertailuryhmään ("verrokit"), jonka piti pysyä tämä tunti valveilla mutta muuten levossa ennen verenpaineen ja pulssin loppumittauksia. Mitä tarkoittaa satunnaistaminen ja miksi on tarpeellista soveltaa satunnaistusta tämäntyyppisissä tutkimuksissa? Onnistutaanko tällä koeasetelmalla harhattomasti vastaamaan tutkimuksen pääkysymykseen? (4 p.)

5. Jatkoa edelliseen tehtävään. Kummankin ryhmän kaikkien koehenkilöiden verenpaineet ja pulssitiheys mitattiin kolmena ajankohtana: (1) alkumittaus juuri ennen stressitestiä, (2) välimittaus heti stressitestin päätyttyä sekä (3) loppumittaus tunnin kuluttua stressitestin päättymisestä. Sekä verenpaine että pulssitiheys olivat kummassakin ryhmässä korkeimmillaan silloin kun ne mitattiin välittömästi stressitestin jälkeen.

Olkoon X_{rik} = muuttujan X arvo ryhmän r jäsenellä i ajankohtana k ($r = 1, 2$, jossa $r = 1$ on koeryhmä ja $r = 2$ on vertailuryhmä; $i = 1, \ldots, n_r$; $k = 1, 2, 3$). Tarkastellaan vastemuuttujana Y verenpaineen eroa (mmHg) alkumittauksen ja loppumittauksen välillä: $Y_{ri} = X_{ri3} - X_{ri1}$, joka kuvaa stressitestistä palautumista. Koeryhmässä ($n_1 = 48$) tämän vastemuuttujan keskiarvo oli +0.3 mmHg ja keskihajonta 3.7 mmHg, kun taas vertailuryhmässä ($n_2 = 37$) keskiarvo oli +1.0 mmHg ja keskihajonta 4.2 mmHg.

Onko mahdollisuus päivätorkkujen ottamiseen vaikuttanut myönteisesti verenpainetason palautumiseen? Vertaa koetuloksia ryhmien välillä sopivin tilastollisen päättelyn välinein, raportoi tulokset ja esitä tiiviisti niiden pohjalta tekemäsi päätelmät. Ovatko saamasi tulokset ja päätelmät yhteensopivat sen kanssa, mitä uutisessa lopuksi väitetään? (6 p.)

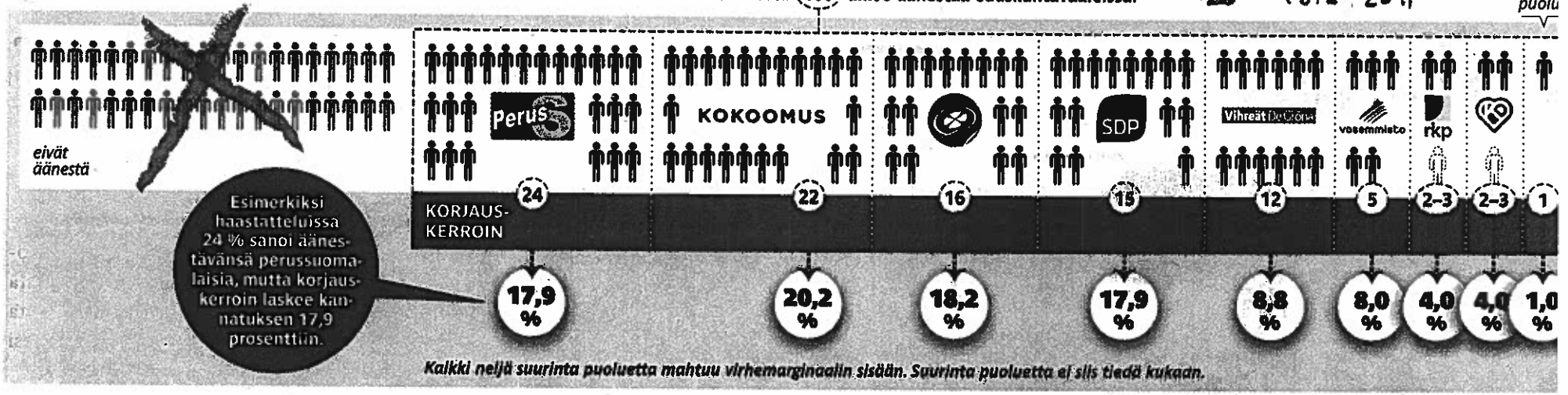
Korjauskerroin muuttaa olennaisesti gallup-tuloksia

Koonnut: JUHA-PEKKA RAESTE / HS, grafiikka: MINTTU LINJALA /

HS 18.2.2011

LIITE 1

HS-gallupin mukaan 140 äänioikeutetusta suomalaisesta (100) aikoo äänestää eduskuntavaaleissa.



Lähde: HS-gallupin 24. 1.–14. 2. 2011 puhelinhaastattelujen täydelliset tiedot. TNS Gallup haastatteli 2 183 henkil

Suurinta puoluetta saati nopean nousijan todellista kannatusta ei tiedä nyt kukaan.

Juha-Pekka Raeste HS

HUONEESSA on 140 henkilöä. Heistä pyydetään poistumaan niitä, jotka eivät aio äänestää kevään eduskuntavaaleissa.

Sata henkilöä jää huoneeseen.

"Kuinka moni teistä äänestää perussuomalaisia?", mielipidetiedustelun tekijä kysyy.

24 kättä nousee ylös.

"Hyvä", mielipidetiedustelun tekijä sanoo. "Perussuomalaisten kannatus on siis 17,9 prosenttia."

TARINA on yksinkertaistettu kuvaus siitä, miten mielipidetiedustelujen niin sanotulla *korjauskertoimella* muutetaan gallupien *raakadatan* tietoja.

Muutosta ei tehdä huijaustarkoituksessa, vaan mahdollisimman tarkkaan osumatarkkuuteen pääsemiseksi.

Luvut ovat aitoja esimerkkejä HS:n tammikuun kannatusmittauksesta.

Äkkiseltään homma kuulostaa tulosten manipuloinnilta.

Jos 24 henkilöä sadasta sanoo äänestävänsä perussuomalaisia, moni uskoo, että perussuomalaisten kannatus on lähempänä 24 prosenttia kuin tilastonikkareiden väittämää 17,9 prosenttia.

Tosiasiassa perussuomalaisten kannatuksen määrää ei tiedä kukaan.

KORJAUSKERTOIMET tulivat Suomessa laajemman yleisön tietoisuuteen vihreiden kannatuksen nousuvaiheessa. Kun tiedustelut lupasivat vihreille suurempaa kannatusta kuin mikä sitten toteutui, tietoja täytyi rukata.

Helsingin Sanomille mielipidemittaukset tekevän TNS Gallupin toimialajohtaja **Juhani Pehkonen** kertoo, että korjauskertoimilla poistetaan tutkijoiden havaitsemia virheellisiä tietoja.

Tiedusteluihin vastaavat henkilöt valehtelevat tai salaavat puoluekantojaan tai unohtavat, mitä puoluetta viimeksi äänestivät.

GALLUPISSA kysytään kaksi kysymystä: Mitä puoluetta äänestäisit nyt ja mitä äänestit edellisissä kunnallisvaaleissa?

Sitten kunnallisvaalivastauksia verrataan todelliseen vaalitulokseen ja valehtelu ja unohdus korjataan oikeaksi tulokseksi. Seuraavaksi lasketaan ilmoitetun ja aiemman äänestyskäyttäytymisen muutoskerroin.

"Sitten otetaan mukaan uudet äänestäjät, joista ei voida olettaa mitään", Pehkonen selittää.

Lopuksi tulosta korjataan vielä aiempiin tutkimuksiin nojautuvilla tiedoilla. Korjaukset eivät perustu tutkijoiden tuntemuksiin vaan pitkän aikavälin tutkimuksiin äänestyskäyttäytymisestä.

Pehkosen mukaan tiedustelut kertovat kannatuksen nousuista ja laskuista, mutta eivät tarkasti kannatuksen tasosta. Esimerkiksi nyt neljä suurinta puoluetta mahtuvat kaikki virhemarginaalin sisään. Kukaan ei oikeasti tiedä, mikä on suurin puolue.

TIETYISSÄ puolueissa kannatus on suurta sellaisissa väestöryhmissä, joita ei tiedustelulla tavoiteta. Esimerkiksi vasemmistoliiton kannatus tuplaantuu säännönmukaisesti vaaleissa raakadataan verrattuna, Pehkonen kertoo.

Vihreillä taas on haamuäänestäjiä eli "olisin äänestänyt, jos olisin mennyt äänestämään"-porukkaa.

Rkp:n Vaasan vaalipiirissä olevat ruotsinkieliset kannattajat taas jättävät vastaamatta muita useammin suomenkieliseen tiedusteluun ja eläkeläiset haluavat muita hanaka min salata kantansa.

"Ongelma on siinä, pitävä tulokset enää paikkaansa, ihmiset vaihtavat radikaal puoluekantoja", Pehkor pohtii.

TAUSTA

Mikä on virhemarginaali?

MIELIPIDETIEDUSTELUJEN toinen kummajainen on virhemarginaali.

Perinteisesti tiedustelujen lopussa muistetaan mainita, että tulosten virhemarginaali on suurten puolueiden osalta kaksi prosenttia suuntaansa.

Se on vain peukalosääntö, joka kertoo yli 20 prosentin kannatusta nauttivan puolueen virhemarginaalin kahden tuhannen hengen otoksesta.

Jos esimerkiksi kokoomuksen kannatus olisi galluptuloksen mukaan 20 prosenttia, tosiasiassa kokoomuksen kannatus on tällöin kansalaisten keskuudessa 95 prosentin todennäköisyydellä mitä tahansa 18,3 prosentin ja 21,8 prosentin välillä.

Näin tarkka vaihteluväli kannatukselle on tällöin 3,5 prosenttiyksikköä. Tuon vaihteluvälin sisällä kaikki tulokset ovat yhtä todennäköisiä.

Toisin sanoen mainittu 20 prosentin tulos ei edes ole yhtään todennäköisempi kuin mikään muukaan luku 18,3–21,8 prosentin välillä.

Juha-Pekka Raeste

LIITE 2: Eräitä kaavoja

$$q_p = (1-w)x_{(k)} + wx_{(k+1)}, \text{ jossa}$$
$$k = \lfloor (n-1)p/100 + 1 \rfloor \text{ ja } w = (n-1)p/100 + 1 - k.$$

$$\text{aidat} = Q_1 - 1.5 \times Q^*, \quad Q_3 + 1.5 \times Q^*$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2},$$

$$s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{k=1}^{r} m_k(\dot{x}_k - \bar{x})^2}$$

$$M \sim \text{Bin}(n,\theta): \quad \mathbb{P}(M=m) = \binom{n}{m}\theta^m(1-\theta)^{n-m},$$
$$\mathbb{E}(M) = n\theta, \quad \text{var}(M) = n\theta(1-\theta)$$

$$X \sim N(\mu,\sigma^2): \quad f(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right), \text{ jossa}$$
$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-z^2/2} = \Phi'(z)$$

$$\text{SD}(\widehat{\theta}; H_0) = \sqrt{\text{var}(\widehat{\theta}; H_0)} = \sqrt{\frac{\theta_0(1-\theta_0)}{n}}$$

$$\text{SE}(\widehat{\theta}) = \sqrt{\frac{\widehat{\theta}(1-\widehat{\theta})}{n}}$$

$$\text{SE}(\widehat{\theta}_1 - \widehat{\theta}_2) = \sqrt{\text{SE}(\widehat{\theta}_1)^2 + \text{SE}(\widehat{\theta}_2)^2}$$

$$\text{SD}(\bar{Y}) = \sqrt{\text{var}(\bar{Y})} = \sigma/\sqrt{n}$$

$$\text{SE}(\bar{Y}) = S/\sqrt{n}$$

$$\text{SE}(\bar{Y}_1 - \bar{Y}_2) = S\sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}, \qquad S = \sqrt{\frac{(n_1-1)S_1^2 + (n_2-1)S_2^2}{n_1+n_2-2}}$$

$$R = \frac{S_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2}\sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}}$$

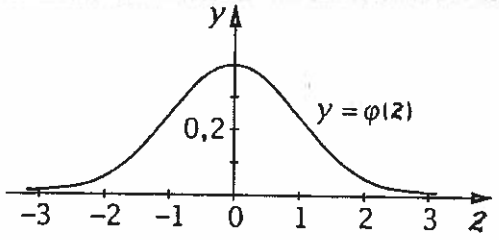
$$\widehat{\beta} = R\frac{S_Y}{S_X}$$

$$\widehat{\alpha} = \bar{Y} - \widehat{\beta}\bar{X}$$

LIITE 3

Normaalijakauman tiheysfunktio

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2}$$

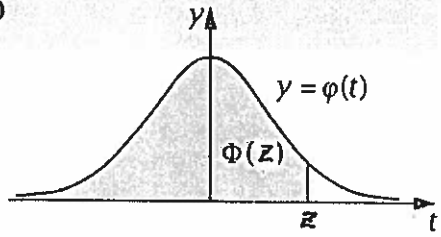


z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,	0,399	397	391	381	368	352	333	312	290	266
1,	,242	218	194	171	150	130	111	094	079	066
2,	054	044	035	028	022	018	014	010	008	006
3,	004	003	002	002	001	001	001	000	000	000

Normaalijakauman kertymäfunktio

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{t^2}{2}}\, dt$$

$$\Phi(a) = P(X \leqslant a),\ \Phi(-a) = 1 - \Phi(a)$$



z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359
0,1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753
0,2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141
0,3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517
0,4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879
0,5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224
0,6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549
0,7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852
0,8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133
0,9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389
1,0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621
1,1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830
1,2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015
1,3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177
1,4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319
1,5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441
1,6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545
1,7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633
1,8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706
1,9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767
2,0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817
2,1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857
2,2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890
2,3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916
2,4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936
2,5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952
2,6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964
2,7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974
2,8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981
2,9	9981	9982	9983	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986
3,0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990
3,1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993
3,2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995
3,3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997
3,4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998

Φ(z)	0,90	0,95	0,975	0,990	0,995	0,999	0,9995	0,9999	0,99995
z	1,2816	1,6449	1,9600	2,3264	2,5758	3,0902	3,2905	3,7190	3,8906

LIITE 4

Studentin jakauma eli t-jakauma

Studentin jakauman fraktiileja $t_u(d)$ eri vapausasteluvuilla d, kun $0.5 < u < 0.9996$
Esim. Kun $d = 5$ ja $u = 0.975$ on $t_{0.975}(5) = 2.57$, jolloin pätee, että
(a) $P(T < 2.57) = 0.975$, (b) $P(T > 2.57) = 0.025$, (c) $P(|T| > 2.57) = 0.05$,
(d) $P(-2.57 < T < 2.57) = 0.95$

	u															
d	0.6	0.7	0.75	0.8	0.85	0.9	0.925	0.95	0.975	0.985	0.99	0.9925	0.995	0.9975	0.999	0.9995
1	0.32	0.73	1.00	1.38	1.96	3.08	4.17	6.31	12.71	21.20	31.82	42.43	63.66	127.32	318.31	636.62
2	0.29	0.62	0.82	1.06	1.39	1.89	2.28	2.92	4.30	5.64	6.96	8.07	9.92	14.09	22.33	31.60
3	0.28	0.58	0.76	0.98	1.25	1.64	1.92	2.35	3.18	3.90	4.54	5.05	5.84	7.45	10.21	12.92
4	0.27	0.57	0.74	0.94	1.19	1.53	1.78	2.13	2.78	3.30	3.75	4.09	4.60	5.60	7.17	8.61
5	0.27	0.56	0.73	0.92	1.16	1.48	1.70	2.02	2.57	3.00	3.36	3.63	4.03	4.77	5.89	6.87
6	0.26	0.55	0.72	0.91	1.13	1.44	1.65	1.94	2.45	2.83	3.14	3.37	3.71	4.32	5.21	5.96
7	0.26	0.55	0.71	0.90	1.12	1.41	1.62	1.89	2.36	2.71	3.00	3.20	3.50	4.03	4.79	5.41
8	0.26	0.55	0.71	0.89	1.11	1.40	1.59	1.86	2.31	2.63	2.90	3.09	3.36	3.83	4.50	5.04
9	0.26	0.54	0.70	0.88	1.10	1.38	1.57	1.83	2.26	2.57	2.82	3.00	3.25	3.69	4.30	4.78
10	0.26	0.54	0.70	0.88	1.09	1.37	1.56	1.81	2.23	2.53	2.76	2.93	3.17	3.58	4.14	4.59
11	0.26	0.54	0.70	0.88	1.09	1.36	1.55	1.80	2.20	2.49	2.72	2.88	3.11	3.50	4.02	4.44
12	0.26	0.54	0.70	0.87	1.08	1.36	1.54	1.78	2.18	2.46	2.68	2.84	3.05	3.43	3.93	4.32
13	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.53	1.77	2.16	2.44	2.65	2.80	3.01	3.37	3.85	4.22
14	0.26	0.54	0.69	0.87	1.08	1.35	1.52	1.76	2.14	2.41	2.62	2.77	2.98	3.33	3.79	4.14
15	0.26	0.54	0.69	0.87	1.07	1.34	1.52	1.75	2.13	2.40	2.60	2.75	2.95	3.29	3.73	4.07
16	0.26	0.54	0.69	0.86	1.07	1.34	1.51	1.75	2.12	2.38	2.58	2.72	2.92	3.25	3.69	4.01
17	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.51	1.74	2.11	2.37	2.57	2.71	2.90	3.22	3.65	3.97
18	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.50	1.73	2.10	2.36	2.55	2.69	2.88	3.20	3.61	3.92
19	0.26	0.53	0.69	0.86	1.07	1.33	1.50	1.73	2.09	2.35	2.54	2.67	2.86	3.17	3.58	3.88
20	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.33	1.50	1.72	2.09	2.34	2.53	2.66	2.85	3.15	3.55	3.85
21	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.08	2.33	2.52	2.65	2.83	3.14	3.53	3.82
22	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.72	2.07	2.32	2.51	2.64	2.82	3.12	3.50	3.79
23	0.26	0.53	0.69	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.07	2.31	2.50	2.63	2.81	3.10	3.48	3.77
24	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.31	2.49	2.62	2.80	3.09	3.47	3.75
25	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.32	1.49	1.71	2.06	2.30	2.49	2.61	2.79	3.08	3.45	3.73
26	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.71	2.06	2.30	2.48	2.60	2.78	3.07	3.43	3.71
27	0.26	0.53	0.68	0.86	1.06	1.31	1.48	1.70	2.05	2.29	2.47	2.60	2.77	3.06	3.42	3.69
28	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.70	2.05	2.29	2.47	2.59	2.76	3.05	3.41	3.67
29	0.26	0.53	0.68	0.85	1.06	1.31	1.48	1.70	2.05	2.28	2.46	2.59	2.76	3.04	3.40	3.66
30	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.70	2.04	2.28	2.46	2.58	2.75	3.03	3.39	3.65
31	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.48	1.70	2.04	2.27	2.45	2.58	2.74	3.02	3.37	3.63
32	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.04	2.27	2.45	2.57	2.74	3.01	3.37	3.62
33	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.27	2.44	2.57	2.73	3.01	3.36	3.61
34	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.27	2.44	2.56	2.73	3.00	3.35	3.60
35	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.26	2.44	2.56	2.72	3.00	3.34	3.59
36	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.31	1.47	1.69	2.03	2.26	2.43	2.55	2.72	2.99	3.33	3.58
37	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.47	1.69	2.03	2.26	2.43	2.55	2.72	2.99	3.33	3.57
38	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.47	1.69	2.02	2.25	2.43	2.55	2.71	2.98	3.32	3.57
39	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.47	1.68	2.02	2.25	2.43	2.54	2.71	2.98	3.31	3.56
40	0.26	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.47	1.68	2.02	2.25	2.42	2.54	2.70	2.97	3.31	3.55
45	0.25	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.46	1.68	2.01	2.24	2.41	2.53	2.69	2.95	3.28	3.52
50	0.25	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.46	1.68	2.01	2.23	2.40	2.52	2.68	2.94	3.26	3.50
55	0.25	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.46	1.67	2.00	2.23	2.40	2.51	2.67	2.92	3.25	3.48
60	0.25	0.53	0.68	0.85	1.05	1.30	1.46	1.67	2.00	2.22	2.39	2.50	2.66	2.91	3.23	3.46
65	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.46	1.67	2.00	2.22	2.39	2.50	2.65	2.91	3.22	3.45
70	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.46	1.67	1.99	2.22	2.38	2.49	2.65	2.90	3.21	3.44
75	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.45	1.67	1.99	2.21	2.38	2.49	2.64	2.89	3.20	3.43
80	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.45	1.66	1.99	2.21	2.37	2.49	2.64	2.89	3.20	3.42
85	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.45	1.66	1.99	2.21	2.37	2.48	2.63	2.88	3.19	3.41
90	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.45	1.66	1.99	2.21	2.37	2.48	2.63	2.88	3.18	3.40
95	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.45	1.66	1.99	2.20	2.37	2.48	2.63	2.87	3.18	3.40
100	0.25	0.53	0.68	0.85	1.04	1.29	1.45	1.66	1.98	2.20	2.36	2.48	2.63	2.87	3.17	3.39
110	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.66	1.98	2.20	2.36	2.47	2.62	2.86	3.17	3.38
120	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.66	1.98	2.20	2.36	2.47	2.62	2.86	3.16	3.37
130	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.66	1.98	2.19	2.36	2.47	2.61	2.86	3.15	3.37
140	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.66	1.98	2.19	2.35	2.46	2.61	2.85	3.15	3.36
150	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.66	1.98	2.19	2.35	2.46	2.61	2.85	3.15	3.36
160	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.65	1.97	2.19	2.35	2.46	2.61	2.85	3.14	3.35
170	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.65	1.97	2.19	2.35	2.46	2.61	2.84	3.14	3.35
180	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.65	1.97	2.19	2.35	2.46	2.60	2.84	3.14	3.35
190	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.65	1.97	2.19	2.35	2.45	2.60	2.84	3.13	3.34
200	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.29	1.45	1.65	1.97	2.19	2.35	2.45	2.60	2.84	3.13	3.34
250	0.25	0.53	0.68	0.84	1.04	1.28	1.44	1.65	1.97	2.18	2.34	2.45	2.60	2.83	3.12	3.33
300	0.25	0.52	0.68	0.84	1.04	1.28	1.44	1.65	1.97	2.18	2.34	2.45	2.59	2.83	3.12	3.32
350	0.25	0.52	0.68	0.84	1.04	1.28	1.44	1.65	1.97	2.18	2.34	2.44	2.59	2.82	3.11	3.32
400	0.25	0.52	0.68	0.84	1.04	1.28	1.44	1.65	1.97	2.18	2.34	2.44	2.59	2.82	3.11	3.32
500	0.25	0.52	0.67	0.84	1.04	1.28	1.44	1.65	1.96	2.18	2.33	2.44	2.59	2.82	3.11	3.31
N(0,1)	0.25	0.52	0.67	0.84	1.04	1.28	1.44	1.65	1.96	2.17	2.33	2.43	2.58	2.81	3.09	3.29