

Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi 801396A

Loppukoe 21.5.2012

Kuulustelija: Pekka Salmi

Laskimet sallittu

1. Satunnaisvektorin (X, Y) yhteisjakauma on esitetty taulukossa

$X \setminus Y$	0	1
0	1/3	1/6
1	1/6	1/3

- (a) Laske $E(X)$, $E(Y)$ ja $E(XY)$.
- (b) Ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia? Perustele lyhyesti.
- (c) Laske pistetodennäköisyydet ehdolliselle jakaumalle X ehdolla $Y = 1$.
2. Toimistoon tulee yhdeksän ja kymmenen välisenä aikana keskimäärin 8 puhelua. Tutkitaan tilannetta Poisson-prosessina.
- (a) Millä todennäköisyydellä välillä 9.45–10.00 tulee ainakin 3 puhelua?
- (b) Kuinka pitkän ajan sihteeri voi olla pois työpisteeltään siten, että todennäköisyys sille että tämän ajanjakson aikana ei tule yhtään puhelua on 50%?

3. Määritellään funktio $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ asettamalla

$$f(x, y) = \begin{cases} cxy & 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2 \\ 0 & \text{muulloin.} \end{cases}$$

- (a) Määrää vakio c siten, että f on jonkin satunnaisvektorin (X, Y) tiheysfunktio.
- (b) Ovatko satunnaismuuttujat X ja Y riippumattomia? Perustele lyhyesti.
- (c) Laske todennäköisyys $P(X \leq Y)$.
4. Olkoon S_n saatujen kruunujen lukumäärä, kun kolikkoa on heitetty n kertaa.
- (a) Mitkä ovat satunnaismuuttujan S_n odotusarvo ja varianssi?
- (b) Käytä normaaliapproksimaatiota todennäköisyyden $P(S_n/\sqrt{n} < x)$ arviointiin, kun x on kiinnitetty luku. Vastauksessa saa esiintyä standardinormaalijakauman kertymäfunktio Φ .
5. Heitetään tavallista 6-sivuista noppaa niin monta kertaa, että saadaan jokin muu silmäluku kuin 6. Määritellään satunnaismuuttuja X siten, että jokainen heittokierros jolla heitetään 6 kerryttää X :ää 5:n verran ja viimeinen heittokierros kerryttää X :ää vielä nopan antaman silmäluvun verran. Täten satunnaismuuttujan X mahdolliset arvot ovat kaikki luonnolliset luvut.
- (a) Määrää satunnaismuuttujan X todennäköisyysgeneroiva funktio.
- (b) Laske satunnaismuuttujan X odotusarvo.