

Todennäköisyyslaskennan jatkokurssi

Loppukoe 18.4.2011 (Prof. L. Holmström, 4 op)

Laskimien käyttö sallittu!

1. Arpajaisissa on 1000 arpaa. Arvoista 1 tuottaa päävoiton 500 euroa, 2 arpaa tuottaa 100 euron voiton, 10 arpaa kukin 10 euron voiton ja loput 987 arpaa ovat ”tyhjiä” (ei voittoa). Herra K ostaa 10 arpaa. Mikä on K:n näillä arvoilla saaman voittosumman odotusarvo?
2. Olkoot X, Y ja Z riippumattomia satunnaismuuttujia odotusarvona μ ja varianssina σ^2 . Laske
 - a) $(X + Y)(X - 2Y)Z$:n odotusarvo.
 - b) $X + XY$:n varianssi.
3. Olkoon N satunnaismuuttuja, jolle

$$P\{N = n\} = \frac{1}{\ln\left(\frac{1}{1-\theta}\right)} \cdot \frac{\theta^n}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

missä $0 < \theta < 1$. Johda

- a) N :n todennäköisyysgeneroiva funktio,
- b) N :n odotusarvo,
- c) N :n varianssi.

(Vihje: $-\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \ln(1-x)$, kun $-1 < x < 1$.)

4. Eräessä taskulaskintyyppissä on neljä levyä painettuja piirejä. Korjattavaksi lähetettyyn laskimeen joudutaan uusimaan (muista laskimista riippumatta) i levyä todennäköisyydellä p_i , missä

$$p_1 = \frac{2}{3}, p_2 = \frac{1}{5}, p_3 = p_4 = \frac{1}{15}.$$

Arvioi keskeisen raja-arvolauseen avulla todennäköisyyttä, että tuhanteen korjattavaksi lähetettyyn laskimeen joudutaan uusimaan yhteensä enintään 1500 levyä. Standardinormaalijakauman kertymäfunktion arvot on monistettu tehtäväpaperin toiselle puolelle.

5. Olkoon satunnaisvektorilla (X, Y) jatkuva jakauma tiheysfunktiona

$$f(x, y) = ce^{-8x^2 - y^2 + 2y}, \quad (x, y) \in \mathbb{R},$$

missä $c > 0$ on vakio.

- a) Määrää c .
- b) Määrää $E(X)$, $E(Y)$, $D^2(X)$, $D^2(Y)$ ja $\text{Cov}(X, Y)$.
- c) Mikä tunnettu jakauma on kyseessä?