801396A TN-LASKENNAN JATKOKURSSI KEVÄT 2011

Loppukoe ma 28.3 klo 14–18 L4

Perustele tarkasti kaikki päätelmäsi!

1. Noudattakoon satunnaismuuttuja $X : \Omega \to \mathbb{R}$ Laplace-jakaumaa (myös kaksinkertainen eksponenttijakauma), tiheytenä

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Määrää $\mathbb{E}(X)$ ja $\mathrm{Var}(X)$. (6 p)

2. Olkoot X ja Y i.i.d. (ts. riippumattomia ja samoin jakautuneita) satunnaismuuttujia. Osoita, että satunnaismuuttujan $X - Y$ jakauma on symmetrinen. (6 p)

3. Olkoot X ja Y i.i.d. satunnaismuuttujia jakaumanaan $\mathrm{N}(0,1)$, ja olkoon $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[\times[0,2\pi[$, $(x,y) \mapsto (r,\theta)$, parin (X,Y) muunnos napakoordinaatteihin. Johda satunnaisvektorin $g(X,Y) = (R,\Theta)$ (yhteis)tiheysfunktio ja muuttujien R ja Θ reunatiheydet. Ovatko R ja Θ riippumattomia? (6 p)

4. Olkoon (X,Y) satunnaisvektori tiheytenä $f_{X,Y}(x,y) = 1$, $0 < x < 1$, $x < y < x+1$ (ja 0 muualla).

(a) Johda muuttujien X ja Y reunatiheydet. (3 p)

(b) Määrää kovarianssi $\mathrm{Cov}(X,Y)$ ja korrelaatio $\mathrm{Corr}(X,Y)$. (3 p)

801396A INTRODUCTION TO PROBABILITY II SPRING 2011

Final exam Monday 28.3 14–18 L4

Motivate thoroughly all your conclusions!

1. Assume that the random variable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ follows a Laplace–distribution (also known as a double exponential distribution), with density

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}.$$

Determine $\mathbb{E}(X)$ and $\mathrm{Var}(X)$. (6 pts)

2. Let X and Y be i.i.d. (that is, independent and identically distributed) random variables. Show that $X - Y$ has a symmetric distribution. (6 pts)

3. Let X and Y be i.i.d. random variables with distribution $\mathrm{N}(0,1)$, and let $g : \mathbb{R}^2 \to [0,\infty[\times[0,2\pi[$, $(x,y) \mapsto (r,\theta)$, be the transformation of (X,Y) to polar coordinates. Derive the joint density of $g(X,Y) = (R,\Theta)$, and the marginal densities of R and Θ. Are R and Θ independent? (6 pts)

4. Let (X,Y) be a bivariate random vector with density $f_{X,Y}(x,y) = 1$, $0 < x < 1$, $x < y < x+1$ (and 0 elsewhere).

(a) Derive the marginal densities of X and Y. (3 pts)

(b) Determine the covariance $\mathrm{Cov}(X,Y)$ and the correlation $\mathrm{Corr}(X,Y)$. (3 pts)