OULUN YLIOPISTO
Matemaattisten tieteiden laitos

AINEIDEN JA TUTKIELMIEN KIRJOITTAJALLE

1. Millainen tehtävä aineenkirjoitus on

Aineiden ja tutkielmien tarkoitus on opettaa käyttämään matemaattista kirjallisuutta ja esittämään matemaattista teoriaa kirjallisesti. Niiden aiheet annetaan usein kirjallisuuskatkelmien muodossa. Seuraavat ohjeet on laadittu lähinnä tällaisia "kirjallisuusaineita" silmällä pitäen. Jos aiheesi on toisen tyyppinen, esim. tehtävänä on joidenkin matemaattisten probleemojen ratkaiseminen, noudata näitä ohjeita soveltuvin osin (ks. etenkin kohtia 4 ja 5).

Kun olet saanut aiheen, tehtäväsi on

A. perehtyä siihen riittävän hyvin,

B. laatia siitä kirjallinen (suomenkielinen) esitys.

Vaihe A on tärkeämpi: jos hutiloit siinä, et voi onnistua myöskään B:ssä.

2. Miten perehdyt aiheeseesi

Matematiikan kirjallisuus on normaalia vaikealukuisempaa: lukijan on selvitettävä itselleen teksti kohta kohdalta, usein kynää ja paperia käyttäen. Jos kirjassa sanotaan, että ehdosta P seuraa ehto Q, sinun on mietittävä, seuraako se varmasti ja jos seuraa, niin miksi. Esittäessäsi sitten omassa tekstissäsi, että P:stä seuraa Q, tämä on **oma väitteesi**, joka sinun on kyettävä perustelemaan. Tarkoitus on, että aineesi on helppolukuisempi kuin alkuteksti, ja näin ollen siinä pitää esittää asiat perusteellisemmin ja yksityiskohtaisemmin.

Hyväksi koettu tapa vaikeatajuista esitystä luettaessa on käydä teksti läpi moneen kertaan, ensin alustavasti ja sen jälkeen kerta kerralta tarkemmin.

Matemaattisen teorian omaksumiseksi ei riitä, että käsittää jokaisen **yksityiskohdan**; ennen kaikkea on tajuttava **juoni**. Miettiessäsi, ymmärrätkö jonkin asiakokonaisuuden (kuten lauseen todistuksen), kuvittele esimerkiksi, että sinun olisi selitettävä se toverillesi.

Jos jokin asia ei ala selvitä, kokeiltavanasi on yleensä monta mahdollisuutta: pohdi sitä riittävän yksinkertaisessa erikoistapauksessa, koeta ymmärtää edellä ollut asia entistä paremmin, vahvista ko. alan pohjatietouttasi, katso miten asia on esitetty muualla kirjallisuudessa jne. Jos asia kaikesta huolimatta jää epäselväksi, keskustele siitä työn ohjaajan kanssa.

Jos selvitettävänäsi on katkelma keskeltä jotain kirjaa, sinun on tavallisesti tutustuttava myös joihinkin aikaisempiin kirjan kohtiin. Miten paljon aiheeseen perehdyttäessä on yleensäkin käytettävä muuta kirjallisuutta, riippuu aiheen luonteesta. Normaalisti ei matematiikan aineenkirjoitustyössä suurten sivumäärien lukeminen ole olennaista.

Kirjassa, josta aiheesi on, voi olla harjoitustehtäviä. Myös niiden avulla saat hyvin kontrolloiduksi, oletko ymmärtänyt asian. Työn ohjaajan kanssa sovitaan erikseen, missä määrin ratkaistuja tehtäviä otetaan mukaan omaan esitykseesi.

Käytettävä kirjallisuus on miltei yksinomaan vieraskielistä. Matemaattinen kieli on kuitenkin yleensä niin yksinkertaista, että sen lukemisessa tarvittava tottumus on helppo saavuttaa. Pyri hankkimaan alusta alkaen tätä tottumusta, ts. **pyri omaksumaan asia suoraan vieraalla kielellä luettuna** äläkä missään tapauksessa rupea suomentamaan tekstiä. **Aine ei todellakaan ole mikään käännösharjoitus.**

Jokaisella on yksilölliset työtapansa, mutta ainakin ”tavallisen” opiskelijan kannattaa noudattaa seuraavaa ohjetta: Sitä mukaa kuin asiat lukemastasi tekstistä selviävät, tee niistä itsellesi **muistiinpanot**. Kehitä itsellesi sopivan lyhyt ja iskevä muistiinpanotyyli. Näin syntyy työn runko, joka kelpaa sitten työvaiheen B pohjaksi.

3. Oman esityksesi suunnittelu

Laadittaessa kirjallista esitystä on ensimmäisiä kysymyksiä, millaiset pohjatiedot lukijalta edellytetään. Aineissa ja tutkielmissa on yleisenä periaatteena, että voit olettaa tunnetuiksi suorittamissasi kursseissa esiintyneet käsitteet ja tulokset. Lisäksi voidaan sopia työn ohjaajan kanssa, että jotain muutakin pidetään tunnettuna (saatat silti joutua perehtymään siihen itse).

Johdannossa voidaan esim. esittää suppeassa muodossa sellaista perustietoutta, joka lukijan on palautettava mieleensä päästäkseen itse asiaan. Pro gradu -tutkielman ja yleensäkin laajojen töiden johdannossa esitetään **tiivistelmä työn sisällöstä** (em. perustietous sijoitetaan silloin yleensä ensimmäisiin johdannon jälkeisiin pykäliin). Pro gradu -työn johdannossa voidaan kertoa myös käsiteltävän aiheen historiasta, merkityksestä yms. edellyttäen, että tekijällä on asiasta riittävästi tietoa. Kaikkien aineiden kirjoittajille huomautetaan toisaalta, ettei tällaista ”tarinamaista” tekstiä kannata esittää johdannossa sen paremmin kuin muuallakaan aineessa - ehkä lyhyitä mainintoja lukuun ottamatta - jos se on vain suoraa kopiota (käännöstä) alkutekstistä.

Kun olet selvittänyt itsellesi esitettävän materiaalin, sinun on järjestettävä ja jäsenneltävä se. **Jäsentelyyn vaikuttaa olennaisesti esityksen perusteellisuusaste.** Vaikka siis esityksesi ainoa ero alkutekstiin olisi lisääntynyt perusteellisuus (yleensä on monia muitakin eroja), et voi ilman muuta noudattaa alkuperäistä jäsentelyä, vaan sinun on itse harkittava jako sekä pykäliin (lukuihin) että kappaleisiin, esitettävä asiat ehkä uudessa järjestyksessä, mahdollisesti lisäiltävä apulauseita ja lauseita, jaettava alkuperäisiä lauseita osiin jne. Jokin kirjan kaksi sivua pitkä pykälä saattaa sinulla venyä 20-sivuiseksi - sitä ei toki pidä tarjoilla yhtenä kokonaisuutena.

Edellä sanottu koskee myös esityksen "hienorakennetta". Jos tyydyt vain jäljentämään alkutekstistä jonkin kappaleen kohta kohdalta pelkästään virkkeitä paisuttaen (perustelujen lisäämiseksi), tuloksena on yleensä alkuperäisen esityksen huonontunut versio. Vaikka yksityiskohdat saattavat olla siinä helpompia ymmärtää, itse asian hahmottaminen tulee vaikeammaksi.

Jaottele oma esityksesi kappaleisiin, joista kukin käsittää kyllin lyhyen kokonaisuuden. Ilmoita lukijalle selkeästi, mistä kussakin kohdassa on kyse; oletko esim. perustelemassa juuri esitettyä vai kohta esitettävää väitettä.

Muista myös, että aineen on oltava itsenäinen kokonaisuus, kun taas alkuteksti on yleensä osa laajempaa kokonaisuutta. Aineessa on mm. selitettävä sellaiset matemaattiset merkinnät, joita lukijan ei voida olettaa tuntevan (kirjassa voidaan käyttää vapaasti merkintöjä, jotka on siinä aikaisemmin määritelty).

Eräs jäsentelyyn liittyvä yksityiskohta: Vaikka kirjoissa annetaan harjoitustehtävät tavallisesti pykälien lopussa, aineessa on harkittava kunkin ratkaistun tehtävän sijoitus erikseen. Tehtävät on yleensä luontevinta esittää "esimerkkien" (tai jopa "lauseiden" tai "seurausten") muodossa sopivissa kohdissa. Jos kirjassa on valmiiksi laskettuja esimerkkejä, sinun on parempi korvata ne itse laskemillasi tehtävillä kuin kopioida ne sellaisinaan esitykseesi.

4. Kirjoitusvaihe

Matemaattisen esityksen kirjoittamisessa pätevät normaalit ns. asiaproosan kirjoittamista koskevat säännöt - et siis ole turhaan harjoitellut koulussa ainekirjoitusta. Tässä suhteessa kelpaavat esikuviksi useimmat matematiikan kirjat (eivät sitä vastoin yleensä luentomonisteet); niitä tarkkaavasti lukemalla saat vastauksen moniin kirjallista esitystä koskeviin ongelmiisi. Esitys muodostuu siis **täydellisistä virkkeistä**, joiden luonteviksi osiksi myös matemaattiset lausekkeet ja kaavat niveltyvät. Toisaalta hyvä asiateksti on **yksinkertaista ja ytimekästä**, vailla turhaa hienostelua.

Lue aina kirjoittamasi virke kaikkine matemaattisine ilmaisuineen itsellesi. Näin tulee tarkistetuksi, onko se oikein muodostettu. Huomaa, että eräät matemaattiset symbolit voidaan lukea lauseyhteydestä riippuen hieman vaihtelevilla tavoilla; tämä tuo joustavuutta lauseiden muodostamismahdollisuuksiin. Esim. yhtäsuuruusmerkki voi tarpeen mukaan sisältää tai olla sisältämättä lauseen predikaatin; kummatkin seuraavista virkkeistä ovat siis oikein:

Tämän nojalla $a = b$.

Väite $a = b$ *nähdään oikeaksi edellisestä yhtälöstä.*

Monesti on jossain määrin harkinnanvaraista, ilmaistako jokin asia sanoin vai symbolein. Epävarmoissa tapauksissa on ajateltava ennen muuta sanonnan **selkeyttä ja havainnollisuutta**. Esim. viimeksi mainitun esimerkkilauseen sanoma muuttuisi paljon epähavainnollisemmaksi, jos siinä merkintä $a = b$ korvattaisiin sanallisella ilmaisulla *a on yhtä suuri* *kuin b*; toisaalta esim. sanonta *tästä päätellään, että* $d|k, d|m$ *ja* $d|n$ tulee selkeämmäksi sanoin kirjoitettuna: ... *että d jakaa luvut* k, m *ja* n. Symboleja $\exists, \vee$ yms. ei milloinkaan käytetä pelkkinä sanallisten ilmaisujen lyhenteinä (siis ei *jokaista positiivilukua* ε *kohti* $\exists$ *sellainen luku* $n_\varepsilon \ldots$*)*.

Edellä esitetyn lisäksi noudatetaan matemaattisessa tekstissä seuraavassa lueteltavia omia ”pelisääntöjä”.

(i) Kaava voidaan sijoittaa **omalle rivilleen**. Näin tehdään
-selvyyden vuoksi, jos kaava on pitkä tai muuten monimutkainen,

-kaavan korostamiseksi, jos se on erityisen tärkeä,

-siksi että kaava voidaan nimetä siihen tehtäviä viittauksia varten.

Viimemainitussa tapauksessa kaavan ”nimi”, yleensä suluissa oleva numero, sijoitetaan rivin alkuun tai loppuun (ks. esimerkkiä alla). Pidä tällaiset kaavarivit selvästi erillään tekstiriveistä. Omalla rivillään oleva kaava pyritään sijoittamaan rivin keskelle, kun taas tekstirivi alkaa vasemmasta reunasta. Hyväksytty tapa on myös valita kaavarivien aloituskohdaksi tietty vakioetäisyys tekstin reunasta.

Sana ”kaava” voidaan edellä käsittää laajemmin kuin sananmukaisesti: kyseessä voi olla selvästi rajattu matemaattinen ilmaisu, joka sisältää myös sanallista tekstiä. Esimerkkejä (kiinnitä huomio myös välimerkkeihin):

Jos jokaista positiivilukua ε *kohti on olemassa sellainen luku* n_ε*, että*

$$(1) \qquad |u_n - u| < \varepsilon \textit{ aina, kun } n > n_\varepsilon,$$

sanotaan ...

Koska lauseesta 3 seuraa, että

$$H(n) = \begin{cases} 1, & \textit{jos } n \equiv 1 \ (\textit{mod } p), \\ 0 & \textit{muulloin}, \end{cases}$$

niin tarkasteltava lauseke ...

Merkitään

$$f_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

jolloin väite voidaan kirjoittaa muotoon ...

(ii) Virke ei saa alkaa matemaattisella kaavalla eikä lausekkeella, puhumattakaan että kaava yksinään muodostaisi virkkeen. Poikkeuksena on tilanne, jossa matemaattisen lauseen tai vastaavan koko sisältö on ytimekkäästi ilmaistavissa kaavalla, esim.:

Lause 12. $D(f+g) = Df + Dg$.

Yleensä ei pitäisi aloittaa virkettä matemaattisella symbolillakaan; ei siis

$n-$rivistä matriisia kerrottaessa on huomattava, että...

vaan esim.

Kerrottaessa $n-$rivistä matriisia...

(iii) Otsikot, määritelmä, lause, todistus jne. aloittavat uuden kappaleen. Koska näiden kappaleiden muu teksti alkaa samalta riviltä, otsikon jälkeen on pantava piste. Jos lauseella on lisänimi, se voidaan ilmoittaa suluissa otsikossa (tietysti ennen pistettä!), esim.:

Lause 7 (Kiinalainen jäännöslause). *Jos $n_1, ..., n_k$ ovat pareittain suhteellisia alkulukuja ja ...*

(iv) Uudet käsitteet alleviivataan tai kursivoidaan. Myös otsikot määritelmä, lause, todistus jne. on syytä alleviivata, lihavoida tai kursivoida; se auttaa lukijaa kokonaisuuden hahmottamisessa.

(v) Jonon tai vastaavan jatkuminen osoitetaan kolmella pisteellä, esim.

$i = 1, 2, \ldots, n, \quad 1 + 2 + \cdots + 20 = 210, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^{-2} = 1 + \frac{1}{4} + \cdots$

(vi) Työn loppuun liitetään kirjallisuusluettelo, joka tietenkin voi muodostua vain yhdestäkin nimikkeestä. Jos kyseessä on kirja, siitä ilmoitetaan tiedot seuraavasti:

J. Berstel - D. Perrin: *Theory of Codes*, Academic Press, New York, 1986.

Aikakauslehdessä ilmestynyt julkaisu ilmoitetaan seuraavassa muodossa:

E. Post: Formal reductions of the general combinatorial decision problem, Amer. J. Math. **65** (1943), 197-215.

Tässä viimeiset luvut ilmoittavat sivunumerot. Aikakauslehtien nimien standardilyhennykset ovat löydettävissä esim. Mathematical Reviews -lehden Index-niteistä. Seuraavassa vielä esimerkki sellaisen julkaisun esittämisestä, joka on ilmestynyt ns. kokoomateoksessa:

A.K. Lenstra - H.W. Lenstra, Jr.: Algorithms in number theory, *Handbook of Computer Science*, vol. *A* (toim. J. van Leeuwen), Elsevier, Amsterdam, 1990, 673-715.

Jos kirjallisuusluettelossa on useita nimikkeitä, ne järjestetään aakkosjärjestykseen ensimmäisen tekijän nimen mukaan, saman tekijän työt aikajärjestykseen, ja numeroidaan. Tällöin niihin voidaan viitata tekstissä esim. seuraavasti: *Työssä* [2] *on todistettu...* tai *Mendelson* [3] *paransi tätä tulosta...* Jos viittaus koskee kirjan tiettyä kohtaa, tämä on spesifioitava mainitsemalla esim. sivunumerot: *Oletetaan tunnetuksi* (ks. [2, s. 123-125]), *että ...* tai lyhemmin *Oletetaan tunnetuksi* [2, s. 123-125], *että ...*

Työn alkuun liitetään **sisällysluettelo**, paitsi aivan suppeissa töissä. Työn **otsikko** (nimi) olisi valittava siten, ettei se ole kovin mitäänsanomaton mutta ei kovin pitkäkään. Jos esim. työn sisältö on Abelin ryhmien yleistä teoriaa, lienee tyydyttävä sellaiseen otsikkoon kuin *Abelin ryhmistä* (tai *Abelin ryhmien yleistä teoriaa)*; jos sen sijaan pääsisältönä on Abelin ryhmien peruslause, ei pidä valita noin ylimalkaista otsikkoa, vaan esim. *Abelin ryhmien peruslause* tai *Abelin ryhmät, erityisesti niiden peruslause* (asioiden painotuksesta riippuen).

Työn konsepti kirjoitetaan riittävän väljästi niin että tilaa jää korjauksia varten. **Konsepti on laadittava joka suhteessa lopulliseksi tarkoitettuun muotoon** (siis myös mitä tulee kaavojen sijoitteluun, rivien aloituskohtiin jne.). Ohjaajan annettua luvan työ kirjoitetaan puhtaaksi. Käytä niin suurta riviväliä, että yksinkertaisia ala- ja yläindeksejä sisältävät symbolit mahtuvat vaikeuksitta tekstiriveille.

Tämän ohjemonisteen loppuun on liitetty aineen mallisivu muodollisen puolen tarkastelua varten.

5. Hiukan suomen kielestä

Jos tunnet itsesi epävarmaksi kielenkäyttäjäksi, pyri mahdollisimman lyhyisiin virkkeisiin. Esityksen sujuvuus voi tästä kärsiä, mutta se on selvyyden rinnalla toisarvoinen seikka. Jos käytät mutkikkaampaa kieltä, pidä huoli että virkkeet ”pysyvät koossa”. Tavallinen virhe on esittää ensin väite ja ladella sen jälkeen perusteluiksi epämääräinen joukko sivulauseita, esim.:

Luku b on p:llä jaollinen, koska p ja a ovat keskenään suhteellisia alkulukuja, jolloin voidaan kirjoittaa $1 = lp + ma$, *joten* $b = lpb + mab$, *missä kumpikin yhteenlaskettava on p:llä jaollinen, koska oletuksen mukaan* $p|ab$.

Selvällä suomen kielellä tämä asia voitaisiin esittää vaikkapa seuraavasti:

Näytetään, että luku b on p:llä jaollinen. Koska p ja a ovat keskenään suhteellisia alkulukuja, on olemassa sellaiset kokonaisluvut l ja m, että $1 = lp + ma$. *Tällöin* $b = lpb + mab$, *missä oletuksen mukaan* $p|ab$. *Luku p jakaa siis viimemainitun summan molemmat yhteenlaskettavat, joten se jakaa myös summan b.*

Varo saamasta vieraskielisestä tekstistä tartuntana suomen kielelle vieraita sanontoja. Luonteva suomenkielinen virke rakennetaan usein toisin kuin saman asian ilmaiseva vieraskielinen virke. Matemaattisen kielen luontevuutta punnittaessa on hyvä ajatella normaalikielen analogisia sanontoja. Miksi kirjoittaisit *ryhmässä on alkio a* <u>*siten, että*</u> $a^2 = b$, kun et varmastikaan sano *tässä on kirjoitus siten, että tukka nousee pystyyn* (vaan vaikkapa *tässä on* <u>*sellainen*</u> *kirjoitus,* <u>*että*</u>*...).* Samoin esim. erittäin usein tarjotulle sanonnalle *jolle on voimassa (etsitään ratkaisua x, jolle on voimassa* $f(x) = 3$) - ja muille vastaaville sanonnoille - olisi runsaasti luontevampia vaihtoehtoja, kuten *joka täyttää ehdon, jolla on ominaisuus* jne.

Englannin kielen käytäntö sanojen yhteen ja erikseen kirjoittamisessa poikkeaa paljon meikäläisestä. Huomaa tämä esim. sellaisten termien kohdalla, joiden alkuosa on erisnimi *(Cauchy sequence* on suomeksi *Cauchyn jono* tai *Cauchy-jono).*

Vältä sijapäätteiden kovin runsasta esiintymistä symbolien yhteydessä, siis mieluummin *d jakaa luvut k* ja m kuin *d jakaa k:n ja m:n.* Yleensäkin lukijalle on helpompaa, jos symboleihin liitetään sopivia määresanoja; vrt. esim. virkkeitä *Näin ollen P on ω:ssa, jos sen projektio n:llä yhtyy N:ään* ja *Näin ollen piste P on tasossa ω, jos sen projektio suoralla n yhtyy pisteeseen N.*

Suomenkielisestä matematiikan perusterminologiasta, joka on vakiintunut mm. luentokursseilla, on syytä pitää kiinni. Jos vastaan tulee uusia käsitteitä, niiden suomentamisesta voi neuvotella työn ohjaajan kanssa. Yleensä termejä on muodostettu suomen kieleen joko sananmukaisina käännöksinä (*group = ryhmä, open = avoin)* tai pelkkinä "väännöksinä" (*derivaatta, integraali, polynomi*). Koska "vääntämisen" tulos joskus olisi kömpelö, on jouduttu myös hakemaan termejä kauempaa ja muodostamaan uudissanoja *(basis = kanta, manifold = monisto).*

Huomaa **kaksoispisteen** käyttö esim. virkkeessä

Todistuksessa nojaudutaan seuraavaan identtisyyteen:

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2.$$

Usein tämänkaltainen asia, ellei se ole kovin monimutkainen, voidaan kyllä sanoa yhtenäkin lauseena (siis ilman kaksoispistettä), esim.

Todistuksessa nojaudutaan identtisyyteen

$$(x^2 + y^2)(u^2 + v^2) = (xu + yv)^2 + (xv - yu)^2.$$

Ole huolellinen pilkun käytössä. Ei ole vakavaa, vaikka et muistaisi jokaista pilkkusääntöä (emme mekään muista) - käytä tervettä järkeä. Pilkulla voi olla virkkeen sisällölle ratkaiseva merkitys. Jos jätät virkkeestä

Tästä seuraa yhtälö (2), *koska a täyttää vaaditut ehdot, ja siis* $f(a) = 0$

pois jälkimmäisen pilkun, niin yhtälö $f(a) = 0$ ei enää olekaan yhtälön (2) **seuraus** vaan **perustelu**. Samoin esim. seuraavan tyyppisestä virkkeestä unohdetaan helposti jälkimmäinen pilkku:

Funktion kuvaajalla, joka kulkee origon kautta, on yksi käännepiste,

Tärkeää olisi muistaa pilkun käytön **pääsääntö**: sivulause erotetaan päälauseesta pilkuin (molemmista päistä, jos se on päälauseen tai päälauseiden keskellä!). Vasta kun hallitset varmasti tämän säännön, voit ruveta opettelemaan sen oikeaoppista rikkomista.

6. Tiivistelmä edellä esitetystä

- Perehdy kunnolla aiheeseesi; kiinnitä huomio sekä yksityiskohtien että laajempien kokonaisuuksien ymmärtämiseen.
- Laadi itseäsi varten muistiinpanot.
- Suunnittele oma esityksesi itsenäisesti; unohda tässä vaiheessa alkuteksti (johon voit palata vain joidenkin yksityiskohtien tarkistamiseksi). Esitä asiat riittävän yksityiskohtaisesti; jäsentele esitys niin, että myös kokonaiskuva muodostuu selkeäksi.
- Kirjoita esitys normaalilla asiatyylillä, käyttäen yksinkertaista mutta kielellisesti oikeaa ilmaisua. Matemaattiset kaavat eivät ole tekstin irrallisia elementtejä (kuvioiden ja diagrammojen tapaan), vaan niiden on normaalilla tavalla luettuina oltava sanallisten virkkeiden osia.
- Varmistu muotoseikoista tutustumalla kohdan 4 ohjeisiin ja tämän monisteen liitteenä olevaan mallisivuun.
- Aineen konseptin voit kirjoittaa käsin, mutta silti lopulliseksi tarkoitettuun muotoon; puhtaaksikirjoitusluvan saat työn ohjaajalta.

Pro gradu -tutkielmien arvostelussa käytetään seuraavia arvosanoja:

Approbatur	1
Lubenter approbatur	1+
Non sine laude approbatur	2-
Cum laude approbatur	2
Magna cum laude approbatur	2+
Eximia cum laude approbatur	3-
Laudatur	3

Mallisivu

7. Lukujonojen koodaaminen

Jos $x > 0$ ja $y > 0$ ovat luonnollisia lukuja niin on olemassa sellaiset yksikäsitteiset luonnolliset luvut q ja r, että

$$x = qy + r, \ \ r < n.$$

Tässä siis r on jakojäännös, kun x jaetaan luvulla y. Siitä käytetään merkintää $\mathrm{rm}(x, y)$. Esimerkiksi $\mathrm{rm}(281, 17) = 9$, koska $281 = 16 \cdot 17 + 9$.

Jos $\mathrm{rm}(x, y) = 0$, niin sanomme, että y on luvun x *tekijä* ja että y *jakaa* luvun x; merkitään $y|x$. Jos luku 1 on lukujen x ja y ainoa yhteinen tekijä, sanomme, että x ja y ovat keskenään *suhteellisia alkulukuja.*

Seuraavan lauseen mukaan jokainen äärellinen jono joukon $\mathbb{N}$ lukuja voidaan koodata lukupariksi (m, n). Koodauksessa esiintyvää funktiota $\mathrm{rm}(x, 1+zy)$ nimitetään kirjallisuudessa *Gödelin β-funktioksi.* Sillä on tärkeitä sovelluksia rekursiivifunktioiden teoriassa.

Lause 7.1. *Olkoon $a_1, ..., a_k$ mikä tahansa äärellinen jono luonnollisia lukuja. Silloin on olemassa sellaiset luonnolliset luvut $m > 0$ ja $n > 0$, että*

$$\mathrm{rm}(m, 1 + in) = a_i \ \textit{aina}, \ \ \textit{kun}\ i \in \{1, ..., k\}.$$

Todistus. Olkoon $M = \max(k, a_1, ..., a_k)$ ja $n = M!$. Osoitamme ensin, että luvut $1 + in$ ja $1+jn$ ovat keskenään suhteellisia alkulukuja aina, kun $1 \leq i < j \leq k$. Tehdään vastaoletus, että on olemassa alkuluku p, joka jakaa luvut $1+in$ ja $1+jn$. Täten p jakaa myös kyseisten lukujen erotuksen $(j - i)$n, minkä nojalla $p|(j - i)$ tai $p|n$. Toisaalta $j - i < k \leq M$ ja $n = M!$, joten $(j - i)|n$. Näistä tuloksista seuraa, että $p|n$, ts. p ei voi jakaa lukua $1 + in$. Näin ollen vastaoletus on väärä.

Voimme nyt soveltaa lukuihin $1+in$ $(i = 1, ..., k)$ Kiinalaista jäännöslausetta (ks. esim. [2, s. 107-108]) ja saamme tuloksena sellaisen luonnollisen luvun $m > 0$, että $\mathrm{rm}(m, 1 + in) = a_i$, kun $i = 1, ..., k$. Etsitty lukupari (m, n) on siis löydetty ja todistus päättyy. $\square$