VIISI VUOSIKYMMENTÄ MATEMATIIKKAA JA TILASTOTIEDETTÄ OULUN YLIOPISTOSSA

Paavo Turakainen, Keijo Väänänen ja Esa Läärä

Matematiikan laitos aloitti toimintansa yliopiston ensimmäisten laitosten joukossa syyslukukaudella 1959. Aluksi laitos vastasi myös teknillisen tiedekunnan matematiikan opetuksesta, mutta syksyllä 1966 teknilliseen tiedekuntaan perustettiin oma matematiikan laitos, myöhempi matematiikan jaos. Tilastotieteen opetus alkoi 1971, jolloin sovelletun matematiikan ja tilastotieteen laitos aloitti toimintansa. Syyslukukauden 1994 alussa matematiikan sekä sovelletun matematiikan ja tilastotieteen laitokset yhdistettiin matemaattisten tieteiden laitokseksi. Yhdistetyn uuden laitoksen startegiasuunnitelman mukaan laitoksen toiminta-ajatuksena ja -tavoitteena oli

- tehdä korkeatasoista teoreettista, metodista ja soveltavaa tutkimusta kansainväliselle forumille ja ympäröivän yhteiskunnan sekä teollisuuden käyttöön;
- kouluttaa edustamiensa alojen asiantuntijoita elinkeinoelämän, hallinnon ja tutkimuksen tehtäviin;
- innostaa vuosittain noin 35 opiskelijaa valmistumaan hyvän aineenhallinnan omaaviksi matemaattisten aineiden opettajiksi;
- välittää ja edistää matemaattista ja tilastotieteellistä asiantuntemusta ja yleistietämystä Oulun yliopiston muodostamassa tiedeyhteisössä sekä ympäröivässä yhteiskunnassa.

Nämä tavoitteet kuvaavat hyvin laitoksen pyrkimyksiä sen 50-vuotisen toiminnan aikana.

Tämä historiikki koostuu kolmesta osasta. Paavo Turakaisen kaksikymmentä vuotta sitten laatima matematiikan laitoksen kolmea ensimmäistä vuosikymmentä koskeva esitys on sellaisenaan ensimmäisenä osana. Sitä seuraa Keijo Väänäsen kirjoittama 4. ja 5. vuosikymmentä koskeva kuvaus lähinnä matematiikan ja sovelletun matematiikan osalta. Kolmantena osana on Esa Läärän tekemä sovelletun matematiikan ja tilastotieteen laitoksen toimintaa ja tilastotieteen opetusta ja tutkimusta tarkasteleva osio.

ENSIMMÄISET KOLME VUOSIKYMMENTÄ MATEMATIIKKAA OULUN YLIOPISTOSSA (Paavo Turakainen)

MATEMATIIKASTA JA SEN TUTKIMUKSESTA

Kuinka on mahdollista, että matematiikka sopii niin ihmeen hyvin reaalisiin objekteihin, vaikka se on kokemuksesta riippumattoman inhimillisen ajattelun tuote? (Albert Einstein)

Matematiikalla on lähes 5000-vuotinen, monivaiheinen historia. Sen neljäs loistokausi alkoi vuoden 1800 tienoilla ja jatkuu vieläkin. Teoksessaan Geschichte der Mathematik Moritz Cantor esittää 3600 sivulla matematiikan historian pääpiirteet kolmelta ensimmäiseltä kaudelta. On arvioitu, että vastaava yleisesitys 1800-luvun matematiikasta täyttäisi sivuja viisinkertaisen määrän. Kuitenkin vasta 1900-luku on osoittautunut todelliseksi matematiikan kulta-ajaksi. Ensimmäisen maailmansodan jälkeen alkanut ennennäkemätön kehitys jatkuu yhä.

Viime aikoina suurta huomiota saaneen kaaosteorian pioneerilla, ranskalaisella Henri Poincarélla (1854–1912) sanotaan olleen käsitys aikansa koko matematiikasta. Nykyisin tämä on täysin mahdotonta. Mm. tietokonetutkimuksillaan ansioitunut John von Neumann arvioi 1940-luvun lopulla, että lahjakas matemaatikko saattaisi hallita silloin tunnetusta matematiikasta noin 10 prosenttia. Ulamin dilemmana tunnetaan tiedonhallintaongelma, jota Stanislaw Ulam pohti eräässä puheessaan 1970-luvun alussa von Neumannin muistoksi järjestetyssä tilaisuudessa. Hän suoritti laskelmia ja päätyi tulokseen, että tuolloin julkaistiin vuodessa noin 200 000 teoreemaa, siis yli 500 teoreemaa päivässä. On arvioitu, että viime vuosina on ilmestynyt uusi matemaattinen julkaisu joka kymmenes minuutti. Tutkimuksen tason arviointi ja vertailu matematiikan eri suuntausten välillä on näin ollen mahdotonta.

Matemaattisen tutkimustyön tekeminen vaatii pitkälle käyvää erikoistumista, eikä se onnistu enää munkeilta, papeilta tai asianajajilta kuten entisaikoina. Tämä on luonnollista, koska matematiikka on 1800-luvulta lähtien ollut hyvin deduktiivinen tiede. Formaaleimmassa muodossaan sen teorioiden peruspilareina ovat aksiomit, joiden varaan rakennetaan deduktiosääntöjen avulla kyseistä teoriaa yhä korkeammalle. Yläkerroksiin ei ole olemassa hissiä, vaan sinne on kiivettävä kärsivällisesti peruspilareiden juurelta. Tässä suhteessa matematiikka poikkeaa oleellisesti useimmista muista tieteistä.

Matemaatikko ja fyysikko katselivat junan ikkunasta pellolla sivuttain seisovaa lammasta. "Katso, musta lammas", fyysikko sanoi. "Tänne näkyvä puoli on musta", matemaatikko korjasi.

Matematiikan deduktiivisesta luonteesta johtuu, että esimerkiksi syventävien opintojen tutkielma yliopistossa ei juuri koskaan sisällä tieteellisesti uusia tuloksia, ja tutkijan ensimmäinen julkaisu on yleensä joko väitöskirja tai lisensiaatin tutkimuksen pohjalta tehty lyhyt artikkeli. Tutkimuksen eturintamaan pääsy ja siellä pysyminen on entistä vaikeampaa. Jopa "matemaattisten tieteiden ylväs pyramidi" Lagrange (1736–1813) osoitti väsymisen merkkejä ollessaan vain 45 vuoden ikäinen. Eräässä kirjeessään hän totesi: "Alan tuntea, kuinka haluttomuuteni vähitellen lisääntyy, enkä tiedä tulenko harrastamaan matematiikkaa vielä kymmenen vuoden kuluttua. Minusta tuntuu, että kaivos on jo liian syvä ja ellei uusia suonia löydetä, se on hylättävä". Depressiokausi meni kuitenkin ohi, ja hänellä oli edessään vielä 20 kunniantäyteistä vuotta matematiikan tutkimuksessa. Lagrange oli myös ensimmäinen esimerkki siitä erikoistumisesta, joka on nykyisin välttämätöntä matemaattisessa tutkimustyössä.

Aikoinaan epäiltiin, että kun matematiikan tutkimus jakaantuu yhä useammaksi haaraksi ja spesialisoituu (Mathematical Reviews sisältää yli 3000 kategoriaa), niin sen voima vähitellen ehtyy. Kaivos on kuitenkin pysynyt tuottoisana, useat suonet ovat yhdistyneet jälleen tai ainakin niitä yhdistäviä käytäviä on syntynyt. Matematiikan historiassa on lukuisia esimerkkejä siitä, miten elvyttävä vaikutus eri tutkimusalojen vuorovaikutuksella on ollut. Tämän päivän matematiikan opiskelijalle on itsestään selvää, että esimerkiksi suoralla, tasolla ja ympyrällä on algebrallinen vastine: niiden yhtälö. Kuitenkin 1600-luvun algebran soveltaminen geometriaan ts. analyyttisen geometrian luominen oli keksintö, joka mullisti matematiikan tutkimuksen. Descartes (1596–1650) kertoo itse, että hänelle oli unessa paljastettu maaginen avain, joka aukaisisi luonnon aarreaitan ja antaisi hänen haltuunsa kaikkien tieteiden todellisen perustan. Hän ymmärsi keksintönsä merkityksen ja sanoi, että hän oli ylittänyt kaiken häntä edeltäneen geometrian samassa suhteessa kuin Ciceron retoriikka ylittää aakkoset. Descartes'in oppeja pidettiin niin tulenarkoina, että Ranskan hallitus kielsi virallisen juhlapuheen pitämisen hänen haudallaan.

Descartes'in ajatusta, että probleema voitaisiin tutkia muuntamalla se ensin jonkin toisen matematiikan alan kysymykseksi, on sovellettu myöhemmin usein matematiikan tutkimuksessa. Kurt Gödelin (1906–1978) matemaattisia teorioita koskevat maineikkaat epätäydellisyys- ja ristiriidattomuustulokset perustuvat ns. aritmetisointiperiaatteeseen. Hän koodasi metateoriaa koskevat, luonnollisella kielellä esitetyt väitteet lukuja koskeviksi predikaateiksi eli relaatioiksi, jolloin ne oli mahdollista esittää aksiomaattisen lukuteorian formaaleina ilmaisuina. Gödelin nerokkailla tutkimuksilla on ollut uraauurtava vaikutus matematiikan perusteiden tutkimuksessa.

Tuoreena esimerkkinä matematiikan tutkimusta elvyttäneistä tekijöistä voidaan todeta, että voimakas tekninen kehitys, erityisesti tietotekniikan kehitys ja sen käytön nopea yleistyminen, on asettanut matemaattiselle tutkimukselle aivan uusia haasteita ja avannut uusia käytäviä esimerkiksi tiedonsiirron ja -suojauksen alueella.

MATEMATIIKAN LAITOKSEN HISTORIASTA JA NYKYPÄIVÄSTÄ

Verrattuna matematiikan monituhatvuotiseen historiaan matematiikan laitoksen historia on lyhyt. Laitos aloitti toimintansa kuitenkin yliopiston ensimmäisten laitosten joukossa syksyllä 1959. Ensimmäisen lukuvuoden toimintakertomus on lakoninen: "Laitoksen esimiehenä on toiminut vt. prof. FT Tauno Salenius. Assistentteina ovat olleet FK Pertti Hyyrynen ja FK Rauno Anttila. Laitoksen kirjastoon on hankittu noin 250 teosta, ja sinne on tullut 52 kausijulkaisua. Lisäksi on hankittu eräiden kausijulkaisujen vanhoja vuosikertoja".

Professorin virka, jota Salenius hoiti ensimmäisen lukuvuoden ajan, oli perustamisjärjestyksessä ensimmäinen Oulun yliopiston viroista. Toisen lukuvuoden ajan virkaa hoiti sen ensimmäinen vakinainen haltija FT Olli Tammi, joka sai nimityksen 25.3.1960. Samana päivänä nimitettiin Olli Pöyry arkkitehtuurin professoriksi. He olivat ensimmäiset nimitetyt professorit Oulun yliopistossa. Yliopistomme taival sai näin kauniin alun. Ovathan matematiikka ja arkkitehtuuri eräitä kulttuurimme kulmakiviä.

Olli Tammen siirryttyä Helsingin yliopistoon ensimmäisen professorin viran hoitajaksi tuli yli kahden vuoden ajaksi FT Klaus Vala, joka ennen Helsinkiin lähtöä ehti hoitaa myös toista, vuoden 1964 alussa perustettua professorin virkaa. Matematiikan laitoksella pitkän päivätyön tehnyt Yrjö Kilpi nimitettiin ensimmäiseen virkaan 4.10.1963. Toisen viran nykyinen ja ainoa vakinainen haltija on Heikki Haahti, joka ennen 29.4.1966 tapahtunutta nimitystään oli jo hoitanut tätä virkaa syksystä 1964 lähtien Valan jälkeen. Kolmanteen matematiikan professorin virkaan nimitettiin 5.6.1971 kutsusta Helsingin yliopiston tietojenkäsittelyn apulaisprofessori Paavo Turakainen.

Edellä mainitusta toimintakertomuksesta ei ilmene, että laitoksella oli tuolloin myös apulaisprofessorin virka. Sen ensimmäinen hoitaja, Tapio Klemola, toimii nykyisin Kanadassa. Muista ensimmäisen lukuvuoden opettajista Salenius siirtyi Helsingin yliopistoon, Anttila ja Hyyrynen toimivat edelleen omassa yliopistossamme.

Kolmatta lukuvuotta koskeva kertomus on jo lähes kahden sivun mittainen ja siitä käy ilmi, että laitos toimi vuokratiloissa osoitteessa Pakkahuoneenkatu 13, missä sen käytössä oli neljä huonetta, keittiö, palvelijan huone, kylpyhuone sekä WC. Palvelijaa laitoksella ei kuitenkaan ollut, puhumattakaan kanslistin virasta, joka saatiin vasta syksyllä 1973. Tätä virkaa on alusta asti uskollisesti hoitanut Sirkka Ollikainen. Muutto Kansallis-Osake-Pankin tiloihin osoitteeseen Kirkkokatu 6 tapahtui vuoden 1962 alussa. Tärkeimmät opetuspaikat olivat Aleksanterinkatu 6:ssa sijainnut puulämmitteinen sali ja Kansan Tahdon juhlasali. Symbolit virtasivat myös Pelastusarmeijan kokoushuoneessa.

Linnanmaalle matematiikan laitos muutti vuoden 1973 lopussa. Professoreilla ja apulaisprofessoreilla on oma työhuone, mutta muutoin useissa huoneissa on 2-4 opettajaa. Opetushenkilökuntaan kuuluu professorikunnan lisäksi tällä hetkellä kaksi yliassistenttia, kymmenen assisstenttia, lehtori ja tuntiopettajia. Apulaisprofessorit ovat nimittämisjärjestyksessä Keijo Väänänen 1.8.1974, Seppo Heikkilä 1.2.1977 ja Vesa Mustonen 1.2.1977. Heistä jokainen on saanut koulutuksensa ja väitellyt Oulun yliopistossa. Ainoan lehtorin viran haltija on FT Markku Niemenmaa. Huomattavan suuri osa opetuksesta joudutaan hoitamaan tuntiopetusmäärärahan turvin. Laitoksen harras toive on, että tarkoitukseen saataisiin uusia opetusvirkoja.

SUORITETUT TUTKINNOT JA NYKYINEN KOULUTUS

Ennen tutkintouudistusta LuK-tutkinto oli erittäin suosittu. Kun tuhannes luonnontieteiden kandidaatti valmistui matematiikassa vuoden 1981 alkupuolella, niin siihen mennessä suoritettujen FK-tutkintojen määrä oli noin 140. Yhteensä yli 1700 opiskelijaa on suorittanut vanhanmuotoisen cum laude approbatur-oppimäärän matematiikassa. Heistä lähes 1200 valmistui luonnontieteiden kandidaatiksi matematiikka pääaineenaan. Ensimmäiset 500 cl-oppimäärää suoritettiin ennen vuoden 1970 loppua, seuraavat 500 ennen vuoden 1976 loppua, ja 1500:s cum laude valmistui keväällä 1982. Valitettavasti LuK-tutkinto siirtyi historiaan tutkinnonuudistuksessa. Valmistuneiden filosofian kandidaattien määrä matematiikassa on noin 340. Keskimääräinen FK-tutkintojen määrä 80-luvulla oli vuotta kohti 22. Lisensiaatin tutkintoja on suoritettu noin 40 ja väitöskirjoja on hyväksytty noin 14 kappaletta.

Uudessa tutkintojärjestelmässä matematiikan laitos vastaa seuraavien suuntautumisvaihtoehtojen opetuksesta:

1. matematiikan suuntautumisvaihtoehto;
2. matematiikan ja tietotekniikan suuntautumisvaihtoehto;
3. aineenopettajan suuntautumisvaihtoehto.

Näistä ensimmäinen on tarkoitettu lähinnä tutkimustehtäviin aikoville. Toisen opetusta on annettu vasta parin vuoden ajan ja sen kehittäminen on vielä kesken. Aineenopettajan linja on valtakunnallisestikin arvioituna ongelmallinen, koska sen opiskelijakiintiöitä ei ole saatu täyteen. Kaikki yliopistot huomioiden siihen saadaan vain noin puolet kokonaiskiintiöstä. Sama ongelma joko heikompana tai voimakkaampana koskee jokaista matemaattis-luonnontieteellistä ainetta. Muihin yliopistoihin verrattuna Oulun tilanne matematiikassa on hyvä. Erityisesti viime kevään valinta oli toiveita herättävä, sillä aineenopettajan linjalle hyväksyttiin 27 opiskelijaa.

Koska matematiikan laitos antaa paljon opetusta myös muiden koulutusohjelmien tai niihin siirtyville opiskelijoille, valmistuneiden tutkintojen määrä ei anna oikeata kuvaa opintosuoritusten kokonaismäärästä. Pääaineopiskelijoiden osuus suoritetuista opintoviikoista oli 80-luvulla alle 40 prosenttia.

MATEMATIIKAN LAITOKSEN TUTKIMUSALAT

Tutkimuskohteiden selostaminen maallikolle, joka ei tunne peruskäsitteitä eikä omaa riittäviä esitietoja, on pulmallista ja johtaa helposti väärinkäsityksiin. Seuraavassa on tämän vuoksi päädytty ratkaisuun, jossa laitoksella edustettuina olevista matematiikan aloista yritetään antaa yleiskuvaus ja valottaa myös niiden historiaa. Täten ei puututa niihin erikoiskysymyksiin, joita laitoksella tällä hetkellä tutkitaan. Asiasta kiinnostunut lukija löytää niitä koskevan selostuksen yliopiston toimintakertomuksesta. Jos hän tämän jälkeen ihmettelee, miksi niin moni matematiikan alue on edustettuna, hän voi etsiä vastausta joukko-opin perustajan Georg Cantorin toteamuksesta: "Matematiikan sielu on sen vapaus". Tutkimusalojen esittelyn laatijat on mainittu sulkeissa otsakkeiden jälkeen.

Tutkimustulokset on julkaistu lähes poikkeuksetta kansainvälisissä kausijulkaisuissa, ja tuloksia on esitelty myös kansainvälisissä kongresseissa, joista useissa karsinta on voimakasta. Tämän lisäksi yhteyksiä muiden maiden tutkijoihin on luotu ja pidetty yllä vierailijoita kutsumalla ja omilla vierailuilla siinä laajuudessa kuin pienet määrärahat ovat sallineet. Viime vuosien julkaisutuotannossa on useita esimerkkejä hedelmällisestä yhteistyöstä ulkomaisten tutkijoiden kanssa.

Differentiaaligeometrian isähahmo Oulussa on professori Heikki Haahti, jonka geometrisiin malleihin moni lienee törmännyt Linnanmaan vanhan osan aulassa. Differentiaaliyhtälöiden teorian tutkimus Oulussa virisi hänen ja akateemikko Rolf Nevanlinnan esittämistä kysymyksistä. Funktioanalyysin tie Ouluun kulki Turun ja Helsingin kautta Yrjö Kilven ja Klaus Valan mukana. Lukuteorian tutkimuksen yliopistoomme toi Seppo Hyyrö, joka on Turun yliopiston lukuteorian koulukunnan perustajan Kustaa Inkerin oppilas ja toimii tällä hetkellä matematiikan professorina Tampereen yliopistossa. Kevään 1989 promootiossa luonnontieteellisen tiedekunnan kunniatohtoriksi vihitty Turun yliopiston professori Arto Salomaa on teoreettiseen tietojenkäsittelyoppiin (theoretical computer science) kuuluvan automaattien, formaalien kielten ja mekaanisen laskettavuuden teorian uranuurtaja Suomessa. Ouluun ala saapui Salomaan ensimmäisenä väitelleen oppilaan Paavo Turakaisen mukana.

Automaatit, formaalit kielet ja laskettavuus (Paavo Turakainen)

Tämä diskreettiin matematiikkaan kuuluva tutkimusalue on osa teoreettista tietojenkäsittelyoppia ja matemaattista logiikkaa. Sen varsinaisena syntymähetkenä voidaan pitää vuotta 1936, jolloin englantilainen matemaatikko Alan Turing analysoidessaan mekaanisen laskemisen käsitettä määritteli matemaattisen koneen, jota nykyisin nimitetään Turing-koneeksi ja joka on eri automaattityypeistä määrittelyltään yleisin. Toisen maailmansodan aikana koneesta oli arvaamatonta hyötyä liittoutuneille, sillä Turing kehitti ideansa pohjalta menetelmän, jolla hän pystyi murtamaan Saksan sotilasjohdon Enigma-koneella salakirjoitetut viestit.

Turing-kone on reaalisen tietokoneen matemaattinen malli. Tehtävä, jota ei voi ratkaista sen avulla, on mahdoton myös tietokoneelle olipa se kuinka super tahansa. Tämä mahdollistaa algoritmisen laskettavuuden rajojen tutkimuksen. On olemassa yllättävän yksinkertaisen näköisiä kysymyksiä, joiden ratkaisemiseen ei koskaan ole mahdollista konstruoida algoritmia, ts. äärellistä ratkaisumenetelmää. Sanomme, että tällaiset kysymykset ovat algoritmisesti ratkeamattomia.

Turingin tuloksista tietämätön tunnettu tietokonejätti rahoitti vuosia sitten projektin sellaisen algoritmin löytämiseksi, jolla annetusta tietokoneohjelmasta voitaisiin aina ratkaista, joutuuko kone sitä suorittaessaan ikuiseen silmukkaan. Kysymys oli tietysti tärkeä, mutta projekti oli etukäteen tuomittu epäonnistumaan yleisessä muodossaan, koska Turing-koneen pysähtymisprobleema on algoritmisesti ratkeamaton.

Turing-koneen käsitteelle perustuva laskettavuuden teoria elää voimakasta kautta. Tietämys siitä, mikä on algoritmisesti ratkaistavissa ja mikä ei, tulee koko ajan yhä tarkemmaksi. Mainittakoon vielä esimerkki klassiseen matematiikkaan suuntautuvasta sovelluksesta. Pariisin kansainvälisessä matemaatikkokongressissa vuonna 1900 David Hilbert esitti matemaatikkojen pohdittavaksi 23 probleemaa, joista kymmenennessä hän kehotti etsimään algoritmia, jolla annetusta kokonaislukukertoimisesta polynomiyhtälöstä voitaisiin aina päätellä, onko sillä ratkaisua, jossa kaikkien muuttujien arvot olisivat kokonaislukuja. Probleema selvisi vasta 1970-luvun alussa. Osoittautui, ettei haluttua algoritmia voida koskaan konstruoida, ts. sitä ei voi olla olemassa.

Turing-konetta rajoitetummilla automaateilla ja niiden hyväksymillä formaaleilla kielillä on sovellutuksia ohjelmointikielten ja kääntäjien teoriassa. Useiden ohjelmointikielten kuten Fortranin ja Pascalin monet syntaksiluokat ovat ns. säännöllisiä tai context-free kieliä, jotka voidaan spesifioida äärellisten automaattien ja pinoautomaattien avulla. Tästä johtuen kyseisiä automaatteja voidaan käyttää jäsentäjien ja kääntäjien konstruoinnissa. Yhdysvalloissa Bellin laboratorioissa työskentelevä tietokone-ekspertti professori Alfred Aho onkin sanonut, että automaattien ja formaalien kielten teoria on tietojenkäsittelyopin kukka, jonka terälehtiä ovat ohjelmointikielet, kääntäjät ja laskettavuuden teoria.

Esimerkkinä tutkimusalan uusista sovellutuksista voidaan mainita tietotekniikan käytön nopean yleistymisen myötä syntynyt polttava tiedon suojaamisen ongelma. Salakirjoitusta harrastettiin jo 4000 vuotta sitten, mutta menetelmät olivat alkeellisia. Viime vuosina on kehitetty mm. automaatteihin pohjautuvia menetelmiä, joissa tieto kryptataan sellaiseen muotoon, että sen murtaminen selväkieliseksi on Turing-laskettavuuden ongelmana riittävän kompleksinen.

Alan tutkimus matematiikan laitoksella keskittyy algoritmisen ratkeavuuden teoriaan ja algebralliseen kieliteoriaan. Yhteistyötä on tehty mm. Lillen (Ranska) ja Gunman (Japani) yliopistojen kanssa.

Differentiaaligeometria (Heikki Haahti)

Differentiaaligeometriassa tutkitaan yleisiä geometrisia objekteja, alun perin lähinnä differentiaalilaskennan avulla. Alkunsa se sai yhtäältä ikivanhasta jo Eukleideen esittämästä kysymyksestä, koulusta tutun ns. paralleeliaksiomin todistettavuudesta, toisen virikkeen tullessa käytännön kentältä Gaussin saadessa tehtäväkseen Hannoverin ja Tanskan toimeenpanemien maanmittaustöiden tieteellisen johtamisen vuosina 1821-1848. Nämä varsin erilaiset lähtökohdat johtivat kumpikin epäeuklidisen geometrian keksimiseen 1800-luvun alkupuolella, missä yhteydessä Gauss loi differentiaalilaskentaan perustuvan pohjan laajemmalle pintojen geometrialle. Gaussin metodi osoittautui sittemmin antoisaksi niiden moniulotteisten "kaarevien maailmoiden" löytämisessä, joista tärkein osa kantaa Gaussin oppilaan Bernhard Riemannin nimeä.

1900-luvun alkuun saakka oli alan tutkimuksessa kysymys enimmäkseen geometriasta geometrian vuoksi, oudosta "todellisuudelle" vieraasta matemaatikoiden puuhasta, joskin geodesian ohella joitakin sovellutuksia konkreettisiin kohteisiin oli esiintynyt. Vuosi 1915 merkitsi tässä suhteessa yllättävää käännettä Einsteinin löytäessä mallin fysikaaliselle universumillemme Riemannin geometrian piiristä: Oli syntynyt yleinen suhteellisuusteoria. Se merkitsi mm. olevaisuutemme perusteiden ymmärtämyksen huomattavaa syvenemistä. Tuskin on yllättävää, että tässä edistys tapahtui aistifysiologiaamme kytketyn havainnollisuuden kustannuksella.

Erityisen voimakas on differentiaaligeometrian kehitys ollut sittemmin 1950–60-luvuilta lähtien tähän päivään saakka, jatkuen edelleen. Analyysin, erityisesti ns. funktioanalyysin ja funktioteorian lisäksi tutkimuksessa käytetään nykyisin monen muun matematiikan alan menetelmiä. Eri matematiikan aloja yhdistävänä ja niiden hallintaa edellyttävänä areenana on alan kiinnostavuus ja merkitys entisestään kasvanut mutta sen omaksuminen myös vaikeutunut.

Myös sovellutuksia on ilmaantunut kasvava määrä, osittain edelleen arvaamattomalla tavalla. Kun esim. vielä 50- ja 60-luvuilla tutkimuksen kärjessä esitetyt uudet teoriat jopa matemaatikoidenkin silmin näyttivät monesti epäilyttävän abstrakteilta ja spekulatiivisilta, fyysikoiden käsityksistä puhumattakaan, oli näiden ns. säieviuhkojen kaarevuusteorian 1970-luvulla havaittu suora sovellettavuus mikropartikkelien fysikaaliseen maailmaan keksintö, joka sai jälleen kerran enimmät asiantuntijat hämmästelemään - Einsteinin tapaan - ihmisen onnistuneimpien subjektiivisten aivoluomusten ja ulkopuolisen luonnon pitkälle ulottuvaa rakenneyhtäläisyyttä.

Päinvastoin kuin esim. kideteoriassa, jossa molekyylien mikrorakenteesta voidaan ennakkoon päätellä suurten kiteisten ainelohkareiden makromuoto, on koko universumin ongelma vielä tässä suhteessa avoin: kvanttiteorian antamasta aineen mikrorakenteesta ei esim. seuraa, että kivi putoaa maahan, vaan gravitaatioilmiö selittyy toistaiseksi erillisellä suhteellisuusteorian antamalla makromallilla. Itse Einstein pohti n. vuodesta 1920 lähtien koko loppuelämänsä tähän kysymykseen kytkeytyvää yhtenäistä kenttäteoriaansa laihoin tuloksin. Lupaavampia yrityksiä on tehty 80-luvulla uusimman differentiaaligeometrian avulla, lopullista vastausta kuitenkaan tavoittamatta.

Voikin olla hyvä jäähdyttää tieteen joskus omahyväistä euforiaa viittaamalla mahdollisuuteen, että olemme sen avulla päässeet vasta raaputtamaan vähän olevaisuuden pintaa, varsinaisen kulttuurimme kasvun ollessa vielä edessäpäin. Tähän näkemykseen johtaa mm. se, että pisimmällekin päässeessä luonnontieteessä, joksi syystä voitaneen katsoa teoreettinen fysiikka, kaivataan uusia käänteentekeviä oivalluksia, niin fysikaalisia kuin myös tässä tapauksessa matemaattisia.

Epälineaarinen funktioanalyysi ja sen sovellutukset (Seppo Heikkilä ja Vesa Mustonen)

Monien havaintomaailmamme ilmiöissä esiintyvien säännönmukaisuuksien kuvaamiseen, selittämiseen ja ennustamiseen voidaan käyttää tehokkaasti matemaattisia malleja. Edellytyksenä on tutkittavan ilmiön selittävien ja selitettävien ominaisuuksien niin täsmällinen muotoilu, että niitä voidaan asettaa vastaamaan jonkin matemaattisen järjestelmän symbolit, ns. muuttujat. Valittujen muuttujien välisten, tutkittavan ongelman kannalta oleellisten riippuvaisuuksien määrääminen johtaa usein differentiaali- ja integraaliyhtälöihin tai epäyhtälöihin. Reunaehdot, joiden vallitessa nämä riippuvuudet ovat voimassa, takaavat suotuisassa tapauksessa sen, että kyseiset yhtälöt voidaan ratkaista, tai mahdollisille ratkaisuille löydetään liki- tai ääriarvoja sopivasti valitussa funktioavaruudessa.

Aaltoyhtälö, lämpöyhtälö, ja Laplace-yhtälö ovat esimerkkejä lineaaristen osittaisdifferentiaaliyhtälöiden perustyypeistä, joita sovelletaan monien fysiikan piiriin kuuluvien ilmiöiden mallintamiseen. Yhtälöiden lineaarisuus helpottaa ratkaisemista, mutta samalla rajoittaa niiden sovellutusaluetta. Tarkemman mallin konstruoiminen johtaa epälineaarisiin yhtälöihin.

Epälineaarinen funktionaalianalyysi on tämän vuosisadan kuluessa kehitetty matemaattinen teoria, joka tarjoaa yhtenäiset puitteet epälineaaristen yhtälöiden ja epäyhtälöiden ratkaisemiselle ja/tai ratkaisujen ominaisuuksien tutkimiselle. Monet epälineaarisen funktionaalianalyysin keskeiset tulokset ovatkin yleistyksiä differentiaali- ja integraaliyhtälöiden teoriassa johdetuista tuloksista. Näiden yleistysten etuna on se, että niihin on seuloutunut oleellisin osa mitä erilaisimpien käytännön ongelmia vastaavien matemaattisten mallien sisältämästä informaatiosta. Näiden yleistyksiä voidaan soveltaa myös uudentyyppisiin yhtälöihin ja epäyhtälöihin (mm funktionaaliset ja stokastiset differentiaali- ja integraaliyhtälöt), jotka soveltuvat entistä paremmin matemaattiseen mallintamiseen.

Epälineaarista funktionaalianalyysiä sovelletaan differentiaali- tai integraaliyhtälön ratkaisemiseen muuntamalla se operaattoriyhtälöksi sopivassa abstraktissa avaruudessa. Kyseinen avaruus on usein ääretönulotteinen, jolloin saadun operaattoriyhtälön ratkaisuun voidaan käyttää esim. Galerkinin menetelmää. Siinä avaruutta approksimoidaan jonolla äärellisulotteisia avaruuksia, joissa operaattoriyhtälö voidaan ratkaista. Toinen mahdollisuus on topologisen asteteorian soveltaminen, joka antaa tietoa yhtälön ratkaisujoukon rakenteesta ja ratkaisujen sijainnista.

Jos operaattoriyhtälö on ns. kiintopisteyhtälö, saadaan sen ratkaisut eli kiintopisteet usein sopivasti määriteltyjen iteraatiojonojen raja-arvoina. Banachin kontraktiokuvausteoreema on ehkä tunnetuin tällä menetelmällä todistettu kiintopistelause. Iteraatiojonon suppeneminen kohti kiintopistettä edellyttää kuitenkin tarkasteltavalta operaattorilta jonkin tyyppistä jatkuvuutta. Käyttämällä hyväksi ns. transfiniitteja jonoja saadaan kiintopistelauseita, jotka soveltuvat myös epäjatkuvia termejä sisältävien lauseiden ratkaisemiseen.

Laitoksen tutkijoilla on ollut yhteistyötä mm. Belgian, DDR:n, Englannin, Länsi-Saksan, Skotlannin, Tsekkoslovakian ja USA:n tutkijoiden kanssa.

<u>Lukuteoria</u> (Keijo Väänänen)

Lukuteoria on kokonaislukujen tarkastelusta kasvanut vanha ja laaja matematiikan osa-alue. Seuraavassa kuvaillaan lyhyesti muutamien kysymysten avulla tätä aihepiiriä. Merkittävää on, että käytännön ongelmista alkanut hyvin teoreettiseksi koettu tieteenala on tietotekniikan edistymisen myötä jälleen osoittamassa soveltuvuuttaan myös käytäntöön.

Laskemisen taito on eräs inhimillisen toiminnan perusteista. Tästä johtuen matematiikan kehitys on saanut voimakkaita vaikutteita lukuteoriasta, erityisesti positiivisten kokonaislukujen ominaisuuksien tarkastelusta. Jo 2-300 vuotta sitten oli selvitetty laajasti tähän aihepiiriin kuuluvia kysymyksiä. Tärkeällä sijalla ovat ns. alkuluvut 2, 3, 5, 7, ..., joita ei voida esittää pienempien lukujen tulona. Nämä ovat kokonaislukujen rakennusosia siinä mielessä, että muut luvut voidaan lausua niiden tuloina. Eräs viehättävimpiä lukuteoriaan liittyviä piirteitä on se, että vielä nykyisinkin löydetään jatkuvasti uusia, ennalta arvaamattomia sovellutuksia asioille, joita on selvitetty vuosisatoja. Niinpä alkulukuihinkin liittyen on koko ajan käynnissä tutkimustoimintaa. Erityisesti viimeisten vuosien aikana on kehitetty alkulukukriteerejä, jotka mahdollistavat suurten alkulukujen löytämisen. Tarve tällaiseen työhön on syntynyt runsaat 10 vuotta sitten luodun ns. RSA-salakirjoitusmenetelmän myötä, jonka perustana on yksinkertainen kokonaislukujen ominaisuuksiin liittyvä Euler-Fermat'n lause. Tämän nykyisin laajassa käytössä olevan järjestelmän toiminta edellyttää kykyä konstruoida suuria alkulukuja. Tiedon salaamisen ohella myös sen siirtoon liittyvissä kysymyksissä, esimerkiksi virheitä korjaavien koodien teoriassa, lukuteorialla on tärkeä osuus.

Varhaisimmilla matemaattisilla tarkasteluilla oli usein geometrinen tausta. Niinpä Diophantoksen yhtälön $x^2 + y^2 = z^2$ ratkaiseminen, ts. yhtälön toteuttavien kokonaislukujen x, y, z määrääminen, vastaa sellaisten suorakulmaisten kolmioiden löytämistä, joiden sivuilla on kokonaislukupituudet. Esimerkkinä tällaisista ns. Pythagoraan luvuista ovat 3, 4, 5 ($3^2 + 4^2 = 5^2$). Jos edellä luku 2 korvataan sitä suuremmalla kokonaisluvulla n, päästään Diophantoksen yhtälöön $x^n + y^n = z^n$. Fermat oli kirjoittanut 1600- luvun alkupuolella tarkastelemansa lukuteorian kirjan marginaaliin keksineensä "ihmeellisen todistuksen" sille, että tällä yhtälöllä ei ole sellaista ratkaisua, missä tulo xyz olisi nollasta eriävä. Hän toteaa todistuksensa kuitenkin olevan niin pitkän, ettei se sovi kirjan marginaaliin. Vuosisataisista ponnistuksista huolimatta tämä ns. Fermat'n otaksuma on edelleen todistamatta. Vajaat 10 vuotta sitten saksalainen Faltings osoitti, että mikäli ratkaisuja on olemassa jollakin arvolla n, niin niiden lukumäärä on äärellinen. Fermat'n otaksuman suuri merkitys on luonnollisesti siinä, että sen ratkaisuyritykset ovat johtaneet useiden matematiikan alojen merkittävään edistymiseen. Se kuvaa hyvin myös sitä lukuteorialle tyypillistä asiaa, että hyvin yksinkertaisin käsittein voidaan asettaa tavattoman vaikeita kysymyksiä.

Vaikea oli entisille kreikkalaisille myös kysymys ympyrän neliöimisestä viivottimen ja harpin avulla. Tehtävän vaikeus ei ole ihmeteltävää, sillä sen mahdottomuus seuraa runsaat sata vuotta sitten osoitetusta luvun π transkendenttisuudesta. Aihe liittyy läheisesti lukujen approksimoimiseen rationaaliluvuilla eli ns. Diophantoksen approksimaatioiden teoriaan. Matematiikan laitoksen lukuteoriaan kohdistuva tutkimustyö tapahtuu pääasiallisesti tällä osa-alueella, jolle on tyypillistä se, että käytettävät menetelmät perustuvat merkittävältä osalta esim. funktioteoriaan ja differentiaaliyhtälöiden teoriaan. Näin lukuteoria, joka on antanut sysäyksen hyvin monien matematiikan alueiden kehitykselle, vuorostaan käyttää hyväksi tämän kehityksen tuloksia.

Laitoksen tutkijat ovat viime vuosina tehneet yhteistyötä mm. Kiinan tiedeakatemian ja saksalaisten Freiburgin ja Kölnin yliopistojen tutkijoiden kanssa.

Ryhmäteoria ja muut algebralliset rakenteet (Jorma Arhippainen ja Markku Niemenmaa)

Vuonna 1977 The New York Times omisti puoli sivua äärellisten ryhmien teorialle. Artikkelissa käsiteltiin äärellisten yksinkertaisten ryhmien teoriaa ja arveltiin, että niiden lopullinen luokittelu saadaan muutaman lähivuoden aikana valmiiksi. Ryhmäteoreetikot saattoivatkin ilmoittaa kesällä 1980, että kyseinen luokittelu on valmis.

Yksinkertaisen ryhmän käsite on peräisin ranskalaiselta matemaatikolta Evariste Galois'lta noin vuodelta 1830. Yksi Galois'n päätuloksista oli se, että polynomiyhtälö ratkeaa peräkkäisillä juurtenotoilla täsmälleen silloin, kun sen Galois'n ryhmä on ratkeava. Äärellisten ryhmien teoria oli pitkään vain yhtälöiden ratkaisemisen apuväline. Vasta viime vuosisadan lopulla abstraktit ryhmät nousivat pääosaan. Tällöin havaittiin, että yksinkertaiset ryhmät ovat teorian keskeisiä rakennuspaloja, ja päädyttiin niitä koskevaan luokitteluongelmaan.

Koska ryhmät eräässä mielessä mittaavat symmetriaa, niin ryhmäteoriaa voidaan käyttää hyväksi geometrian ja algebrallisten struktuureiden tutkimisessa. Esimerkiksi Rubikin kuutioon liittyy ryhmä, jonka alkioiden lukumäärä on $2^{27} * 3^{14} * 5^{3} * 7^{2} * 11$.

Algebrallisiin rakenteisiin voidaan liittää ns. topologia, jolloin saadaan topologinen algebra jne. Topologisten algebrojen tutkiminen on virallisesti luokiteltu funktioanalyysin piiriin kuuluvaksi, mutta myös topologialla ja kompleksianalyysillä on tärkeä merkitys. Topologisten algebrojen käsite on suhteellisen uusi, vaikka eräitä erikoistapauksia, kuten normialgebroja ja Banach-algebroja, on tarkasteltu jo aikaisemmin. Banach-algebrojen tutkimuksen uranuurtaja on neuvostoliittolainen matemaatikko Israel Gelfand, joka aloitti normialgebroja koskevat tutkimuksensa 1930-luvulla.

Matematiikan laitoksen tutkimus tällä alueella keskittyy topologisten algebrojen esitysteorioihin ja ideaalirakenteen kuvaamiseen sekä ryhmäteorian soveltamiseen muihin algebrallisiin struktuureihin. Yhteistyötä on tehty erityisesti Dortmundin, Prahan ja Tarton yliopistojen kanssa.

4. JA 5. VUOSIKYMMEN (Keijo Väänänen)

RAKENTEIDEN MUUTOKSIA, KOULUTUKSEN KEHITTÄMISTÄ JA SUKUPOLVENVAIHDOS

Neljännelle vuosikymmenelle siirryttäessä vanhimmat laitoksen pitkäaikaisista työntekijöistä tulivat eläkeikään. Ensimmäisenä jäi eläkkeelle vuoden 1990 alkaessa

Yrjö Kilpi, joka oli johtanut laitosta lähes neljännesvuosisadan (1964-1987). Seuraavana vuonna eläkkeelle siirtyi laitosta sen alkuvuosista lähtien palvellut kanslisti Sirkka Ollikainen. Kesällä 1993 vapautui seuraava matematiikan professuuri Heikki Haahden saavutettua eläkeiän. Hän työskenteli laitoksella persoonallisen värikkäällä tavallaan kolme vuosikymmentä. Syksyllä 1994 laitoksen ensimmäinen assistentti vuonna 1959 aloittanut ja sen jälkeen lukuisia opetustehtäviä hoitanut FL Pertti Hyyrynen tuli eläkeikään. Hyyrynen vastasi kauan myös laitoksen kirjastosta ja nykyisin amanuenssille kuuluvista tehtävistä. Kilveltä vapautuneeseen virkaan valittiin FT Lassi Päivärinta, joka aloitti työnsä laitoksella vuoden 1992 alussa. Sen sijaan matematiikka menetti Haahdelta jääneen professuurin, jonka resurssi siirrettiin teknilliseen tiedekuntaan ja käytettiin muihin tarkoituksiin. Tilalle matematiikan laitos sai sovelletun matematiikan professorin viran Jukka Sarasen siirtyessä teknillisen tiedekunnan matematiikan jaoksesta laitoksellemme syyslukukauden 1993 alussa.

Tiedekunnan laitosrakenteiden uudistuksen yhteydessä matematiikan laitos sekä sovelletun matematiikan ja tilastotieteen laitos yhdistettiin matemaattisten tieteiden laitokseksi 1.8.1994 alkaen. Kun edellisenä syksynä oli perustettu sovelletun matematiikan linja, uuden yhdistetyn laitoksen vastuulle tuli seuraavien viiden suuntautumisvaihtoehdon (linjan) opetus:

- aineenopettajan linja;
- matematiikan linja;
- matematiikan ja tietotekniikan linja;
- sovelletun matematiikan linja;
- tilastotieteen linja.

Opetushenkilökuntaa oli matematiikassa, sovelletussa matematiikassa ja tilastotieteessä seuraavasti: professoreita (2, 1, 1), apulaisprofessoreita (3, - , 1), lehtoreita (2, - , 2), yliassistentteja (3, -, 2), assistentteja (9, 1, 2) ja lisäksi tuntiopettajia. Erityisesti sovellettuun matematiikkaan tarvittiin lisäresursseja, joten päätettiin, että sovelletun matematiikan ja tilastotieteen apulaisprofessori Juha Tienari suuntaa opetustaan sovellettuun matematiikkaan ja tehtiin esitys lehtoraatista, joka toteutuikin 1995, jolloin

FT Erkki Laitinen valittiin tehtävään. Tilastotieteen osalta sovittiin, että ns. matematiikkatyöryhmän ehdotusten mukaisesti pyritään perustamaan biometrian virka yhteistyössä lääketieteellisen tiedekunnan kanssa ja ekonometrian virka yhteistyössä taloustieteiden kanssa. Näiden suunnitelmien etenemistä on käsitelty tarkemmin Esa Läärän laatimassa tilastotieteen osiossa. Myös matematiikassa runsasta tuntiopettajien antamaa opetusta saatiin vakinaisemmalle pohjalle kahden lehtoraatin avulla, joihin valittiin FT Juha Kortelainen (1990) ja FL Alli Huovinen (1995). Kun professorien virkanimikkeet yhtenäistettiin 1998 ja osa assitentuureista muutettiin yliassistentuureiksi, laitoksemme opetus- ja tutkimustoimintaa oli vuosituhannen vaihdetta lähestyttäessä tekemässä matematiikassa, sovelletussa matematiikassa ja tilastotieteessä (5, 2, 3) professoria, (3, 1, 1) lehtoria, (6, - , 1) yliassistenttia, 9 assistenttia ja 2 päätoimista tuntiopettajaa. Tämä vastaa nykyistä tilannetta lukuunottamatta sitä, että nyt on säästösyistä täyttämättä matematiikassa professuuri ja yliassistentuuri ja tilastotieteessä assistentuuri. Laitoksella on lisäksi kolme kansliahenkilöä, amanuenssi ja sovellussuunnittelija.

90-luvulla koulutustoimintaa lähdettiin kehittämään monipuolisesti. Heti vuosikymmenen alussa perustettiin matematiikan ja tilastotieteen yhteinen opetuksen arviointiryhmä (myöhemmin opetuksen kehittämistyöryhmä), joka ohjasi toimintaa. Tavoitteena oli koulutuksen tehostaminen ja valmistuneiden määrän selvä lisääminen, johon tähtääviä toimenpiteitä ja tuloksia tarkastellaan koulutusta käsittelevässä osiossa. Työn tuloksellisuutta kuvaa parhaiten se, että laitos nimettiin valtakunnalliseksi koulutuksen laatuyksiköksi vuosiksi 1999-2003. Kunnian ja maineen ohella tämä vahvisti merkittävästi laitoksen taloutta. Itse asiassa määrärahojen vähyys aiheutti ongelmia koko vuosikymmenen, jo syksyllä 1994 hyväksytyssä staretgiasuunnitelmassa todetaan, että "Määrärahojen supistumisen vuoksi huomattava osa tieteellisten lehtien tilauksista on jouduttu lakkauttamaan ja uusien kirjojen tilaaminen on karsittu minimiin. Lisäsupistuksiin tällä alueella ei ole mahdollisuuksia vahingoittamatta oleellisesti opetus- ja tutkimustyön edellytyksiä." Laatuyksikköstatus merkitsi laitokselle lähes miljoonan markan vuotuista lisätuloa, joka reilusti kaksinkertaisti ns. toimintamäärärahan. Tämän ansiosta säästökeskustelut jäivät vähemmälle viiden vuoden ajaksi, mutta ovat kyllä sen jälkeen palanneet jäädäkseen. Laitos pystyi tuolloin omin varoin tukemaan jatko-opiskelijoita ja henkilökunnan tutkimustyötä edistävää kansainvälistä yhteistyötä. Tehty koulutuksen kehittämistyö kantoi hedelmää myös siinä mielessä, että laitos oli paremmin varautunut siirryttäessä vuonna 2004 enemmän tulospohjaiseen rahoitusjärjestelmään.

Uuden vuosituhannen alkuvuosina laitoksella tapahtui sukupolvenvaihdos, jonka seurauksena matematiikan ja sovelletun matematiikan professorikunta on kokonaisuudessaan uudistunut, osittain kahteen kertaan. Juha Tienari jäi eläkkeelle lokakuussa 2002 ja Seppo Heikkilä vuoden 2003 alussa. Molemmat olivat aloittaneet opintonsa laitoksen ensimmäisellä vuosikurssilla 1959. Tienarin virka tuli hakuun sovelletun matematiikan virkana, joka suunnattiin informaatiotekniikan tarvitsemiin matemaattisiin menetelmiin, ja siihen valittu FT Lasse Holmström aloitti työnsä laitoksella vuoden 2004 alussa. Samaan aikaan aloitti myös Heikkilältä vapautuneessa matematiikan professuurissa FT Juha Kinnunen. Syyslukukaudella 2003 inversio-ongelmien tutkimuksen Ouluun tuonut Lassi Päivärinta kutsuttiin professoriksi Helsingin yliopiston matematiikan laitokselle ja hänen jättämänsä virka on edelleen säästösyistä täyttämättä. Seuraava matematiikan professuuri vapautui elokuun alussa 2005, kun vuodet 1988-1996 laitoksen johtajana toiminut Paavo Turakainen jäi eläkkeelle. Tähän virkaan valittu FT Peter Hästö aloitti laitoksella vuoden 2006 alussa. Luonnollisen tiedekunnan dekaanina vuosina 2000-2005 toimineen Vesa Mustosen jäädessä eläkkeelle vuoden 2006 alkupuolella avautuneeseen matematiikan professuuriin valittiin FT Mikael Lindström, joka tuli laitokselle vuoden 2008 alussa. Edelleen vapautuivat sovelletun matematiikan ja matematiikan professuurit Jukka Sarasen jäädessä eläkkeelle keväällä 2006 ja Juha Kinnusen siirtyessä TKK:n matematiikan professuuriin syyslukukaudella 2007. Näihin virkoihin valitut PhD Valeriy Serov (sovellettu matematiikka) ja FT Maarit Järvenpää (matematiikka) ovat juuri aloittaneet tehtävissään. Parhaillaan on hakuvaiheessa matematiikan professuuri, joka vapautui elokuun alussa vuosina 1997-2005 laitoksen johtajana toimineen Keijo Väänäsen siirtyessä eläkkeelle.

Myös lehtorikunnassa on tapahtunut muutoksia. Juha Kortelaisen siirtyessä tietojenkäsittelytieteen laitokselle vuosituhannen vaihteessa vapautuneeseen lehtoraattiin valittiin FT Juha Berkovits, joka menehtyi vaikeaan sairauteen kesällä 2007. Laitoksen opetuksen kehittämistyön ja kouluyhteistyön uupumaton ja tarmokas tekijä Alli Huovinen jäi eläkkeelle syyslukukauden 2004 alussa ja tehtävää jatkamaan valittiin FT Kari Myllylä. Berkovitsin jälkeen avautuneeseen virkaan valittu FT Esa Järvenpää tuli tehtävään kuluvan vuoden elokuussa.

Uusi vuosituhat toi tullessaan laitoksen elämään vaikuttaneita uusia käytäntöjä, joiden perimmäisenä tarkoituksena oli toiminnan tehostaminen. Heti vuosituhannen alussa siirryttiin opetushenkilökunnan osalta kokonaistyöaikaan. Käytännössä tämä tarkoitti sitä, että kullekin laadittiin vuosittain väljähkö suunnitelma siitä, miten 1600 tunnin työaika jakaantuu opetukseen liittyviin tehtäviin, tutkimukseen ja muihin tehtäviin. Yliopistoissa siirryttiin uuteen palkkajärjestelmään (UPJ, joka myöhemmin muuttui VPJ:ksi) vuonna 2005. Tällöin luovuttiin ikälisäjärjestelmästä ja palkka jaettiin tehtävien vaativuustason ja henkilökohtaisen suoriutumisen perusteella määräytyviin kahteen osaan. Uudistus ei sujunut täysin kitkattomasti, mutta on nyt jo vakiintunut ja toimiva käytäntö. Myös laitoksen saamaa rahoitusta on muutettu vähitellen vuodesta 2004 alkaen enemmän tulospohjaiseksi, jolloin yhä merkittävämpi osa hankitaan opetuksen ja tutkimuksen saavutusten perusteella. Monialaisessa tiedekunnassa tämä aiheuttaa pysyvän keskustelun rahanjaon perusteista. Nähtäväksi jää, mitä muutoksia vuoden 2010 alussa voimaan astuva yliopistouudistus tuo tullessaan.

KOULUTUKSESTA JA TULOKSISTA

Kuten jo edeltä käy ilmi laitoksella käynnistettiin vahva opetuksen kehittämistoiminta -90 luvulle tultaessa. Keskeisenä päämääränä oli rakentaa koulutus niin, että se varustaa opiskelijat taidoilla, joilla menestyy tulevaisuuden muuttuville työmarkkinoilla. Tavoitteita olivat mm

- opastaa ja totuttaa opiskelijat tavoitteelliseen jatkuvaan opiskeluun sekä aktivoida heidät kotitehtävien ratkaisemiseen ja tutkivaan otteeseen opiskelussaan;
- lisätä palautteen saamista ja vuorovaikutusta opiskelijan ja opettajan välillä;
- lisätä opiskelijoiden välistä yhteistyötä;
- mahdollistaa opiskelijoiden ja opettajien suunnitteluyhteistyö;
- poistaa oppimisen esteitä (mm väärät asenteet ja käsitykset omista mahdollisuuksista).

Kun nyt jälkikäteen tarkastelee tätä tavoitelistaa voi todeta sen "ikuisen" ajankohtaisuuden. Työtä näiden tavoitteiden eteen on tehtävä jatkuvasti ja eri aikoina tarvitaan mahdollisesti erilaisia toimenpiteitä. Tuolloin ratkaisevan tärkeä merkitys oli sillä, että opetukseen ja ohjaukseen alettiin koko henkilökunnan toimesta kiinnittää aikaisempaa enemmän huomiota ensimmäisestä vuosikurssista tutkielmien ohjaukseen saakka. Ehkä omaleimaisinta toimenpiteistä oli monipuolinen tuutoritoiminta ja yhteistyö koulujen kanssa, joista keskeinen toimija Alli Huovinen on laatinut jäljempänä olevan hyvän kuvauksen.

Erityisen haasteellisiksi koettiin uudet matematiikan ja tietotekniikan linja ja -93 alkanut sovelletun matematiikan linja, jotka kärsivät opetushenkilökunnan vähäisyydestä. Oulun alueen elinkeinoelämän ja teknillisen tiedekunnan vahvuuksiin nojaten laitos valitsi matemaattisen tietotekniikan suunnaksi tietoliikenteen matematiikan ja informaatiotekniikan tarvitsemat matemaattiset menetelmät on edelleen yksi laitoksen painopistealueista. Tehty valinta oli haasteellinen ja sen ymmärrettiin edellyttävän asiantuntemuksen lisäämistä ja myös tutkimuksen osittaista suuntaamista alan ongelmiin. Linjavalinta oli onnistunut ja siltä valmistuneita on sijoittunut merkittävä määrä informaatiotekniikan teollisuuden tehtäviin. Sovelletun matematiikan linjalla koulutus on painottunut numeriikkaan ja optimointiin. Molempien linjojen opetustarjontaa ovat vahvistaneet ja monipuolistaneet teknillisen tiedekunnan matematiikan jaoksen kurssit. Aineenopettajien koulutuksessa olimme vahvoja jo aikaisemminkin, mutta kehitystyön tuloksena laitoksestamme tuli valtakunnallisesti johtava matematiikan aineenopettajien kouluttaja. Erityisesti viime vuosina tällä on ollut suuri merkitys koko Pohjois-Suomen kannalta aineenopettajien suuren eläkkeelle siirtymisen johdosta.

Kun -80 luvulla valmistuneita FK-tutkintoja oli keskimäärin 22 vuodessa, vastaava luku oli -90 luvulla 36 ja kuluvalla vuosikymmenellä 51. Laitokselta valmistuneiden maistereiden määrä ylitti 1000 vuonna 2006 ja kevääseen 2009 mennessä valmistuneita on 1206, joista matematiikassa 1045, sovelletussa matematiikassa 41 ja tilastotieteessä 120. Tutkintojen määrä ylitti matematiikassa 1000 vuonna 2008. FK-tutkintojen määrät olivat poikkeuksellisen suuria vuosina 2005-2008 (65, 70, 68 ja 66), mihin vaikutti osaltaan vuonna 2005 voimaan tullut uusi tutkintoasetus, jonka seurauksena vanhamuotoisen tutkinnon suoritusmahdollisuus päättyi kesällä 2008. Uudessa asetuksessa palattiin kaksiportaiseen tutkintomalliin ja otettiin uudelleen käyttöön LuK-tutkinto, joka oli poistettu edellisessä tutkinnonuudistuksessa neljännesvuosisata aikaisemmin. Huomattavaa on, että laitos antaa merkittävän määrän opetusta muiden koulutusohjelmien opiskelijoille, myös oman tiedekunnan ulkopuolelle erityisesti taloustieteiden tiedekuntaan. Laitokselle suoritetut opintomäärät opintopisteissä ovat olleet keskimäärin 14500 -90 luvulla ja 18500 tällä vuosikymmenellä. Ennätys on vuoden 2005 21463 opintopistettä. Opinnoista runsas kolmasosa menee oman laitoksen ulkopuolelle.

Jatkokoulutuksen tehostamiseksi tehtiin esitys omasta graduate-school hankkeesta "Matemaattinen mallintaminen ja laskentamenetelmät", jossa olivat osallisina myös teknillisen tiedekunnan matematiikan jaos, tietoliikennetekniikan ja teknillisen mekaniikan laboratoriot sekä Nokia Mobile Phones-yksikkö. Tämä saatiinkin 5-paikkaisena vuoden 1995 alussa, mutta se liitettiin ensimmäisen nelivuotiskauden jälkeen Infotech tutkijakouluun. Toinen laitokselta hallinnoitu tutkijakoulu oli Lassi Päivärinnan johtama "Inversio-ongelmien tutkijakoulu" vuosina 2002-2005. Laitoksen edustajat ovat olleet mukana myös useissa muissa tutkijakouluissa ja parhaillaan jatko-opiskelijoillamme on paikkoja viidessä tutkijakoulussa. FT-tutkintoja on tähän mennessä tehty 45, joista matematiikassa 34, sovelletussa matematiikassa 5 ja tilastotieteessä 6. -90 luvulla valmistui 16 tohtoria ja tällä vuosikymmenellä tähän mennessä 12. Tohtorikoulutuksessa asetetut määrälliset tavoitteet eivät ole toteutuneet, mutta viime vuosina tehdyt tehostamistoimet näyttävät tuovan kohennusta. Erityisesti tapahtuneen sukupolvenvaihdoksen jälkeinen mahdollisuus pitkäjänteiseen toimintaan parantanee tulosta. FL-tutkinto on säilyttänyt matematiikassa ja tilastotieteessä asemansa korkeatasoisena ammattitutkintona monia muita tieteenaloja paremmin. Näitä tutkintoja on laitoksen toiminta-aikana tehty yhteensä 99, joista matematiikassa 76, sovelletussa matematiikassa 12 ja tilastotieteessä 11. -90 luvulla laitoksella tehtiin 24 lisensiaatin tutkintoa ja kuluvalla vuosikymmenellä 34.

Laitos on osallistunut myös yliopiston ulkopuolella tehtyihin matematiikan osaamista edistäneisiin hankkeisiin. Heti -90 luvun alkupuolella toteutettiin Kajaanissa ja Rovaniemellä luonnontieteiden kandidaatista maisteriksi hanke, jossa noin 50 pääasiassa omalla laitoksellamme LuK-tutkinnon suorittanutta opettajaa täydensi opintonsa FK-tutkintoon. Vuosituhannen vaihteessa teimme Kajaanissa, Kuusamossa, Oulussa ja Rovaniemellä koulutushankkeen, jossa runsaat 50 luokanopettajaa suoritti matematiikan 35 ov:n opintokokonaisuuden ja sai näin kelpoisuuden opettaa matematiikkaa peruskoulun ylimmillä luokilla. Lisäksi laitos toteutti 2004-2007 yhdessä Kajaanin OKL:n kanssa koulutuskokeilun, jossa noin 40 opiskelijaa suoritti luokanopettajan opintojen ohessa 35 ov (60 op) matematiikkaa ja noin puolet heistä matematiikan aineenopettajan tutkinnon. Tämän hyvin onnistuneen koulutushankkeen johdossa toimi ma professorina Juha Berkovits. Laitoksemme on jo pitkään vastannut myös Lapin yliopiston luokanopettajakoulutuksen matematiikan 15 ov:n (25 op) opintokokonaisuudesta.

Tuutoroinnista ja kouluyhteistyöstä (Alli Huovinen)
Matematiikan ja tilastotieteen yhteinen opetuksen arviointiryhmä perustettiin syksyllä 1991. Työryhmän puheenjohtajana toimi aluksi professori Elja Arjas ja hänen jälkeensä professori Keijo Väänänen. Heidän ansiokseen on suurelta osin luettava se, etä työryhmän toiminta lähti ripeästi käyntiin. Olemassaolonsa ensimmäisen puolen vuoden aikana ryhmä kokoontui yhdeksän kertaa, minkä lisäksi kokoonnuttiin pienemmissä ryhmissä ja pidettiin kaksi palautepäivää. Opetuksen ongelmia kartoitettiin sekä opiskelijoille että opettajille suunnatuilla kyselyillä. Samalla kerättiin vinkkejä opetuksen tehostamiseksi.

Opiskelutahti ja oman työpanoksen merkitys on huomattavasti suurempi yliopisto-opinnoissa kuin lukiossa. Erityishuomiota oli siis kiinnitettävä opetuksen ja opiskelun kehittämiseen ja opiskelijat haluttiin sitouttaa tähän. Vanha konsti on parempi kuin pussillinen uusia, sanotaan, mutta vielä parempi on vanha konsti, johon on lisätty pussillinen uusia. Niinpä vanhoihin opetusmuotoihin lisättiin muun muassa laaja vertaistuutorointi, opintopiirit ja erilaiset kokeelliset laskuharjoitusmuodot sekä kurssien suorittamismahdollisuudet. Tuutoroinnin kehittäminen oli ehkä tärkein yksittäinen toimenpide, jossa laitos on ollut edelläkävijä. Perinteisiä opetusmuotoja tukemaan kehitettiin kahdentasoista tuutorointijärjestelmää:

- Opettajatuutoritoiminta, jossa asiantuntijatuutoroinnin ohella henkilökohtaisella ohjauksella pyritään lisäämään opiskelijoiden itseohjautuvuutta ja siihen liittyvää vastuullisuutta omasta oppimisestaan.
- Opiskelijatuutoritoiminta, jossa perusajatuksena on yhteistoiminnallisen oppimisen aikaansaaminen. Pyritään luomaan sellainen opiskeluilmapiiri ja hyvä yhteishenki, että opiskelijat motivoivat ja auttavat toisiaan.

Syksyllä 1992 aloitettiin oppisisällöllinen tuutorointi testikokeiden avulla. Samanaikaisesti kokeiltiin opiskelijatuutoreiden apua kotitehtävien ratkaisemisessa. Viimeksi mainittu toiminta tyrehtyi heti alkuunsa, sillä varsinaista erikseen tuutoroinnille tarkoitettua tilaa ei ollut, aikataulutuksessa oli ongelmia ja päivystystä oli harvoin.

Testien palautus ja tarvittaessa henkilökohtainen ohjaus tapahtui laitoksella opettajan työhuoneessa. Nämä kokeilut olivat erittäin merkittäviä tuutoritoiminnan käynnistämisen kannalta. Testien palautustilaisuudet toimivat syksyllä 1993 aloitetun toiminnan tuutoreiden koulutustilaisuuksina. Toiminnan käynnistyessä opiskelijat (12) olivat toisen vuosikurssin opiskelijoita ja tuutorointi kohdistettiin lähinnä ensimmäisen vuoden opiskelijoihin. Koska kyseessä oli uudenlaisen opiskelukulttuurin kehittäminen, toiminta vaati ennakkoluulojen poistamiseksi tehokasta markkinointia. Keväällä 1994 otettiin käyttöön tuutoritupa, joka on laitoksen keskikäytävästä hyllyillä erotettu levennys. Päivystys tilassa oli arkipäivisin, jolloin paikalla oli sekä opiskelija- että opettajatuutoreita. He auttoivat kotitehtävien ratkaisemisessa, oppimateriaaliin perehtymisessä sekä muissa opiskeluun liittyvissä asioissa. Tupaan oli koottu laaja valikoima monisteita, laskuharjoitustehtäviä ja muuta opetukseen liittyvää materiaalia. Tuutorointi saatiin koskemaan lähes kaikkia luentokursseja. Se tehostaa opiskelua, mutta sillä on myös sosiaalinen ulottuvuus. Tuutoritupa on luonteva kohtaamispaikka, jossa voi tavata toisia opiskelijoita ja laitoksen henkilökuntaa ja sillä on huomattava merkitys laitoksen erinomaiselle yhteishengelle. Opintojen etenemisen kannalta on tärkeää, että opiskelijat tuntevat kuuluvansa laitosyhteisöön ja heistä ollaan kiinnostuneita.

Vuonna 1997 tuutorointia jatkettiin "kesälukukaudelle", jolloin matematiikan kursseja opiskeltiin opiskelijatuutoreiden ohjaamissa pienryhmissä. Kesäkursseista saatujen hyvien kokemusten innoittamina lukupiirejä syntyi myös luennoitavien kurssien opiskelun tehostamiseksi. Kesäkurssit ja lukupiirit vauhdittivat kesken opiskelujen työelämään menneiden opiskelijoiden valmistumista.

Vuosituhannen vaihteessa aloitettiin omaopettajatoiminta. Jokaiselle uudelle opiskelijalle nimetään omaopettaja laitoksen henkilökunnasta.Omaopettajan tehtävänä on auttaa opiskelijaa suunnittelemaan opintojaan, tutustuttaa opiskelija laitoksen monimuotoiseen opetustoimintaan ja toimia hänen lähimpänä kontaktinaan matemaattisten tieteiden laitoksella.

Oppimispäiväkirjat otettiin käyttöön peruskursseilla syksyllä 2002. Viikottaisten laskuharjoitusten lisäksi opiskelijat pitävät oppimispäiväkirjaa, johon he laskevat osan laskuharjoitustehtävistä ja kokoavat luentojen keskeisiä asioita. Tuutorit tarkistavat tehtävät ja tarvittaessa opastavat niiden ratkaisemisessa. Oppimispäiväkirjoja on sittemmin käytetty myös syventävissä opinnoissa.

Matemaattisten tieteiden laitoksella kehitetyt tuutorointimuodot sopivat myös kouluihin. Vuosittain on tehty kymmeniä vierailuja kouluihin jo viidentoista vuoden ajan. Lukiotuutorointi aloitettiin jo 1997 ja vuodesta 2002 lähtien on pidetty peruskoulun ja lukion kertauskursseja useilla Oulun ja Oulun läänin lukioilla ja kauempanakin. Peruskoulujen matematiikkakerhot ja -leirit, Matikkaraketit, aloitettiin syksyllä 2002. Kaikissa näissä toiminnoissa ovat olleet mukana laitoksen tuutorit. He saavat niistä arvokasta opettajakokemusta, joka huomioidaan opetusharjoittelussa.

"Laitoksen ilmapiiri on poikkeuksellisen aktiivinen. Oppimisen ohjaus, tutortoiminta ja opintoneuvonta on järjestetty esimerkillisesti ja integroitu oppimiseen. Opiskelijatutorit, ns. laskututorit ovat saaneet tehtäväänsä koulutuksen. Opettajatutorit ovat tavattavissa taukotuvassa päivittäin, ja ohjausta saavat tarvitessaan sekä pääaine- että sivuaineopiskelijat", mainitaan Korkeakoulujen arviointineuvoston esityksessä korkealaatuisen koulutuksen yksiköiksi vuosille 1999-2000. Laitos nimitettiin laatuyksiköksi myös toisen kerran vuosiksi 2001-2003.

LAITOKSEN TUTKIMUSTOIMINNASTA

Matematiikka on vahvasti kansainvälinen tiede ja teoreemat ovat yhtä tosia täällä poronhoitoalueen reunalla kuin maailman metropoleissa.Tiedonkulun ja yhteydenpidon helppous mahdollistaa entistäkin paremmin matemaattisen tutkimustyön myös täällä Pohjois-Suomessa. Kuitenkaan pohjois-suomalaista matematiikkaa ei ole olemassa, vaan täällä tehdyt matemaattiset tutkimukset joutuvat saman kovan kansainvälisen arvioinnin kohteeksi kuin muuallakin tehdyt. Se, että alamme tutkimus on pääosin riippumatonta kalliista laitteista, on helpottanut laitoksemme kokemassa sukupolvenvaihdoksessa, jossa henkilökunnan vaihtumisen myötä myös tutkimusalueet ovat osittain uudistuneet tai uudistumassa. Paavo Turakaisen laatiman historiikin alkuosan tavoin seuraavassa on laitoksen uusien ryhmien kuvaukset tutkimusalueistaan. Osalla näistä on yhteyksiä aikaisempaan tutkimustoimintaan, osaa ei ole aikaisemmin ollut edustettuna. Yleisesti voidaan todeta, että Suomessa perinteisesti vahva analyysi on vahvistanut asemiaan myös Oulussa ja diskreetin matematiikan tutkimus on hieman vähentynyt. Uutta kahdenkymmenen vuoden takaiseen tilanteeseen on myös se, että sovelletun matematiikan tutkimustoiminta on oleellisesti laajentunut ja voimistunut -90 luvulla syntyneiden uusien linjausten edellyttämällä tavalla. Laitoksen tutkimuksen painopistealat ovat

- analyysi ja sen sovellukset;
- algebra ja lukuteoria;
- informaatiotekniikkaa tukeva matematiikka;
- tilastolliset mallit ja data-analyysi.

Laitoksen tutkimustoimintaa on arvioitu neljä kertaa viimeisten 20 vuoden aikana. Kolme arviota on järjestänyt Suomen Akatemia, vuosia 1992 ja 2000 arvioinnin suorittivat kansainväliset arviointiryhmät ja vuonna 1995 akateemikko Olli Lounasmaa. Viimeisin arvio tapahtui syksyllä 2007 yliopistossamme suoritetun laajan tutkimuksen arvioinnin yhteydessä. Kaikissa näissä arvioissa laitoksemme tutkimustoiminnan on todettu olevan hyvää kansainvälistä tasoa. Tutkimusten tulokset julkaistaan pääosin mahdollisimman hyvissä kansainvälisissä tieteellisissä lehdissä ja julkaisujen vuosittainen määrä 30-40 on kelvollinen. Useimmat tutkimusryhmät ovat saaneet ulkopuolista rahoitusta, lähinnä Suomen Akatemialta, ja molemmissa matematiikan tutkimuksen huippuyksiköissä on edustus laitokseltamme, Maarit ja Esa Järvenpään ryhmä on osa analyysin ja dynamiikan yksikköä ja Valeriy Serovin ryhmä osa inversio-ongelmien yksikköä. Heikkouksina arvioinneissa on pidetty tutkimusryhmien pientä kokoa ja siitä aiheutuvaa tutkimuksen pirstaleisuutta. Toiseksi heikkoudeksi on nähty jo edellä mainittu tohtorikoulutuksen tehottomuus, jossa on nähtävissä parantumista.

Todettakoon vielä ennen laitoksen uusien tutkimusalueiden esittelyä, että edellisen 20 vuoden aikana ns. Riemannin hypoteesin ohella toinen matematiikan kuuluisimmista avoinna olleista kysymyksistä, lukuteorian tutkimuksen esittelyn yhteydessä mainittu Fermat´n otaksuma, on ratkennut, kun Andrew Wiles todisti otaksuman oikeaksi vuonna 1994.

<u>Epälineaarinen potentiaaliteoria</u> (Peter Hästö)

Epälineaarisessa potentiaaliteoriassa tutkitaan p-Laplace yhtälöä ja sen yleistyksiä. Kun p saa arvon 2, saadaan klassinen, lineaarinen Laplace operaattori joka liittyy muun muassa aalto- ja lämpöyhtälöihin. Hankalampaa epälineaarista tapausta voidaan käyttää esimerkiksi Navier-Stokes yhtälössä joka kuvaa ns. epä-Newtonilaisten nesteiden virtauksia. Näitä nesteitä esiintyy glaseologiassa (eli jäätiköiden virtauksen tutkimuksessa), reologiassa, epälineaarisessa elastisuusteoriassa ja huokoisten materiaalien virtausyhtälöissä. Toisen tyyppinen sovellus löytyy kuvankäsittelystä.

Epälineaarinen potentiaaliteoria liittyy jossain määrin laitoksella aiemmin mm. Vesa Mustosen ja Juha Berkovitsin toimesta tutkittuun epälineaariseen analyysiin. Itse asiassa, jälkimmäisen tutkimusalueen tulokset pätevät myös p-Laplace yhtälön ratkaisuille, mutta ne ovat yleisempiä, ja siten eivät yhtä vahvoja.

Epälineaarisen potentiaaliteorian tutkimus rantautui Oulun yliopistoon 2004 Juha Kinnusen aloittaessa matematiikan professorina. Aihepiirin tutkimus vahvistui vuonna 2006 kun Peter Hästö aloitti yliopistossa professorina, ja edelleen vuonna 2007 kun hankkeelle myönnettiin useampivuotinen rahoitus Suomen akatemialta ja Emil Aaltosen säätiöltä. Tätä kirjoittaessa hankkeessa oli viisi aktiivista jatko-opiskelijaa, joista kaksi on jo suorittanut lisensiaattitutkinnon. Kinnunen siirtyi loppuvuodesta 2008 Teknillisen korkeakoulun palvelukseen, mutta tutkimusryhmä jatkaa toimintaansa kahdessa "toimipisteessä". Helsingin lisäksi yhteistyötä on Ruotsiin, Norjaan, Saksaan, Italiaan, Portugaliin ja Yhdysvaltoihin.

Funktionaalianalyysi (Mikael Lindström).

Funktionaalianalyysi on matematiikan osa-alue joka tutkii topologisia vektoriavaruuksia ja näiden välisten kuvausten ominaisuuksia. Kuvausta tai muunnosta, joka liittää funktioon funktion, kutsutaan usein lineaariksi operaattoriksi. Erikoistapauksena operaattorista saadaan funktionaali, jonka arvot ovat lukuja, mutta argumentit funktioita. Analyysin alaan liittyviä ongelmia tutkitaan operaattorien avulla funktioavaruuksien välillä. Ei-triviaaleja tuloksia saavutetaan vasta kun funktioavaruus varustetaan normilla tai yleisemmin topologialla ja tutkitaan lineaarisen operaaattorin analyyttisia ominaisuuksia kuten jatkuvuutta ja kompaktisuutta. Tästä yhteispelistä analyyttisten ja algebrallisten tapahtumien välillä syntyy funktionaalianalyysi. Funktionaalianalyysi sai alkunsa viime vuosisadan alussa erilaisten muunnosten kuten Fourierin muunnoksen tutkimisesta sekä differentiaali- ja integraaliyhtälöiden ratkaisujen tutkimisesta. Tämä tapahtui suurilta osilta Ivar Fredholmin, David Hilbertin, Erhard Schmidtin ja Frigyes Rieszin töiden pohjalta. Myöhemmässä vaiheessa Stefan Banach ja John von Neumann olivat keskeisiä lineaaristen vektoriavaruuksien teorian kehittäjiä ranskalaisen Maurice Fréchet'n ohella. Integraaliyhtälöitä käsittelevissä artikkeleissaan Hilbert kehitti suuren määrän sellaista funktionaalianalyysin peruskäsitteistöä, jonka sitten muun muassa Schmidt esitti yhtenäisenä abstraktina Hilbertin avaruuksien teoriana. Hilbertin avaruudet, joissa sisätulo määrittää avaruuteen normin, ovat erityisesti käytössä kvanttimekaniikassa. Banachin vuonna 1932 ilmestyneessä "Théorie des opérations linéaires" nimisessä teoksessa määritellään eräs funktionaalianalyysin keskeisempiä stuktuureja, nimittäin täydellinen normilla varustettu vektoriavaruus. Tänä päivänä tällaista avaruutta kutsutaan Banachin avaruudeksi. Yleisesti Banachin avaruudet ovat Hilbertin avaruuksia monimutkaisempia.

Funktionaalianalyysin sovellusaloja muissa matematiikan osa-alueissa ovat muun muassa differentiaali- ja integraaliyhtälöiden teoria, todennäköisyyslaskennan teoria, numeerinen analyysi, approksimaatioteoria sekä matemaattinen fysiikka, erityisesti kvanttimekaniikka.

Matematiikan laitoksen tutkimuksen aihepiiri tällä alueella käsittelee muun muassa analyyttisia funktioavaruuksia ja niiden lineaarisia operaattoreita. Tässä tutkimuksessa funktionaalianalyysi ja klassinen kompleksianalyysi kohtaavat rakentavalla ja mielenkiintoisella tavalla. Yhteistyötä on tehty erityisesti Valencian, Madridin, Los Angelesin ja Kentin yliopistojen tutkijoiden kanssa.

Funktionaalianalyysin alan saavutuksista matematiikassa on myönnetty Fieldsin mitali, joka vastaa Nobelin palkintoa muisssa tieteissä, viidelle matemaatikolle:

C. Fefferman (1978, Singulaariset intergaalioperaattorit), A. Connes (1982, von Neumannin algebrat), V. Jones (1990, von Neumannin algebrat), J. Bourgain (1994, Banachin avaruuksien geometria) ja W.T. Gowers (1998, Banachin avaruuksien geometria).

Geometrinen mittateoria (Maarit ja Esa Järvenpää)

Geometrisen mittateorian ja fraktaaligeometrian juuret ovat 1800-luvulla. Tuolloin konstruoitiin matematiikan historian ensimmäiset fraktaalit, vaikka tätä nimitystä ei niistä vielä silloin käytetty. Näiden konstruktioiden tarkoituksena oli osoittaa vääriksi joitakin aiemmin totena pidettyjä matemaattisia uskomuksia ja aluksi niitä pidettiin lähinnä kiusallisina erikoistapauksina. Vähitellen yksittäisistä esimerkeistä rakentui matematiikan kauhugalleria, kun osoittautui, että epäsäännölliset poikkeukset olivatkin luultua yleisempiä. Suhtautuminen näihin erikoisiin esimerkkeihin ei ollut aluksi kovinkaan myönteistä. Esimerkiksi Henri Poincarè kirjoitti huolestuneena: "Aikaisemmin uusi funktio keksittiin johonkin käytännön tarpeeseen; tänään niitä keksitään nimenomaan siksi, että niillä voidaan osoittaa edeltäjiemme ajattelun puutteet eikä niistä koskaan saada johdetuksi mitään muuta."

Yksi tällainen fraktaalien prototyyppi on Cantorin joukko. Se on yksikkövälin ylinumeroituva osajoukko, jonka pituus on nolla. Sen avulla voidaan helposti rakentaa kasvava ja jatkuva funktio yksikkövälilta itselleen, jonka derivaatta melkein jokaisessa pisteessä on nolla. Tämä vaikuttaisi olevan ristiriidassa integraalilaskennan peruslauseen kanssa. Voidaankin väittää, että moderni mittateoria on saanut alkunsa tämän ongelman tutkimisesta.

Geometrista mittateoriaa on tutkittu koko 1900-luvun ajan, mutta se syntyi uudelleen 1970-luvulla tietokoneiden kehittymisen myötä. Tietokoneiden avulla voidaan piirtää melko helposti erittäin monimutkaisia kuvia. Näiden kuvien ymmärtäminen johti myös dynaamisten systeemien teorian kehittymiseen. Hyvinkin yksinkertaisissa dynaamisissa systeemeissä esiintyy mielenkiintoisia fraktaaleja. Näiden analysointi on vaikuttanut vahvasti geometrisen mittateorian kehittymiseen. Sanan fraktaali, joka tulee latinankielen murtunutta tarkoittavasta sanasta fractus, otti käyttöön Benoit Mandelbrot 1970-luvulla. Nykyisin fraktaalilla tarkoitetaan joukkoa tai mittaa, jollaon erilaisia yksityiskohtia kaikilla skaaloilla. Esimerkiksi Norjan rannikko ei muutu suoraksi viivaksi vaikka katsoisi kuinka läheltä tahansa. Tällaisten perinteisen geometrian ulottumattomissa olevien joukkojen tutkimukseen on siis pitänyt kehittää uusia työkaluja.

Yksi tällainen työkalu on dimensio. Perinteisten esineiden dimensio on kokonaisluku: piste on nollaulotteinen, viiva yksiulotteinen, paperin pinta kaksiulotteinen, pöytä kolmiulotteinen jne. Fraktaalin dimensio sen sijaan voi olla muukin kuin kokonaisluku. Esimerkiksi edellä mainitun Cantorin joukon dimensio on log 2/log 3. Se on siis aidosti nollan ja yhden välillä. Tällaisten joukkojen mittaamiseen on löydetty uusia mittoja, joiden avulla voidaan määritellä myös ei-kokonaislukuisia dimensioita.

Suomeen geometrisen mittateorian tukimuksen toi Pertti Mattila 1970-luvulla. Hänen siirryttyä Jyväskylään 1980-luvun lopulla geometrisen mittateorian tutkimusryhmä alkoi kasvaa ja nyt ryhmässä toimii jo kolmannen polven tutkijoita. Nykyään geometrisen mittateorin tutkimusta on Oulussa, Helsingissä ja Jyväskylässä. Ryhmämme tutkii erilaisia fraktaalien kokoa ja muita ominaisuuksia mittaavia parametrejä kuten dimensioita ja huokoisuutta ja näiden käytöstä erilaisissa muunnoksissa. Vanhimmat dimensiot ovat Hausdorffin määrittelemä Hausdorffin dimensio ja Minkowskin määrittelemä Minkowskin dimensio, jota kutsutaan myös laatikkodimensioksi. Uudempia dimensioita ovat pakkausdimensio, jonka Tricot määritteli 1980-luvulla, sekä erilaiset lähinnä mittoihin liittyvät dimensiospektrit. Huokoisuus puolestaan kuvaa, kuinka paljon joukossa tai mitassa on reikiä. Eräs ryhmämme keskeisiä tutkimusaiheita on ollut selvittää huokoisuuden ja dimensioiden välisiä yhteyksiä. Toinen keskeinen tutkimusaihe on ollut dimensioiden käyttäytyminen erilaisissa muunnoksissa -- esimerkiksi projektioissa. Olemme soveltaneet geometrisen mittateorian menetelmiä myös dynaamisten systeemien tutkimukseen muunmuassa ratkaisemalla Bricmont'n ja Kupiaisen esittämän konjektuurin koskien eräiden äärentönulotteisten systeemien SRB-mittoja.

Vaikka tutkimuksemme on puhtaasti matemaattista eikä sovellukset ole ensisijaisena tavoitteena, voi geometrisen mittateorian tuloksilla olla myös yllättäviä käytännön sovelluksia. Tästä hyvä esimerkki on digitaalinen aurinkokello. Perinteinen aurinkokello on maahan isketty keppi, joka heijastaa varjon maahan piirretyn kellonajan päälle. Digitaalinen aurinkokello on sensijaan fraktaali, jonka varjo on oikea kellonaika digitaalisina numeroina. Tällaisen fraktaalin periaattellisen olemassaolon osoitti eräs geometrisen mittateorian kuuluisimmista tutkijoista, Kennneth Falconer, jo 1980-luvulla. 2000-luvulla siitä onnistuttiin tekemään kaupallinen tuote.

Harmoninen analyysi (Mahmoud Filali)

Klassisen harmonisen analyysin ja Fourier-analyysin juurien voidaan yleisesti katsoa sijoittuvan vuoteen 1755, jolloin Daniel Bernoulli esitti ratkaisunsa kuuluisaan värähtelevää jousta (yksiulotteinen aaltoyhtälö) koskevaan ongelmaan. Bernoullin esitti ratkaisunsa äärettömänä summana käyttäen eräitä perusfunktioita (sin(x) ja cos(x)) sekä tuntemattomia kertoimia. Ratkaisun muoto oli uusi ja yllättävä, jonka takia useat matemaatikot eivät sitä hyväksyneet. Tuntemattomien kertoimien löytäminen pysyi arvoituksena aina vuoteen 1777 saakka, jolloin Euler löysi keinon löytää tarvittavat kertoimet *integraalin* ja *sinifunktion* avulla. Tätä voidaan pitää klassisen harmonisen analyysin syntynä. Eulerin esittämää kaava kertoimien määräämiseksi sanotaan Eulerin kaavaksi ja saatuja kertoimia kutsutaan nykyisin Fourierin kertoimiksi. Lisäksi saatu ääretön summa on Bernoullin ratkaisu aaltoyhtälölle.

Monet Bernoullin ratkaisuun liittyvät kysymykset pysyivät kuitenkin ratkaisemattomina, kuten esimerkiksi äärettömän summan suppeneminen. Nämä kysymykset muodostavat Fourier-sarjojen teorian pääteeman. Joseph Fourier (1768-1830) oli matemaatikko sekä fyysikko ja hän oli myös Napoleonin ystävä. Hän tarkasteli Bernoullin ratkaisuun liittyviä kysymyksiä ja käytti äärettömiä summia hänen lämpöyhtälöidensä ratkaisuihin, jotka hän julkaisi vuonna 1822 kuuluisassa kirjassaan *“Theorie analytique de la chaleur”* (vapaasti suomennettuna *“Lämmön analyyttinen teoria”*). Työllään Fourier loi pohjan harmoniselle analyysille, joka mahdollistaa monimutkaisten jaksollisten ilmiöiden (mm. aaltoliike, värähtely, lämmön johtuminen) analyyttisen tarkastelun.

Harmonista analyysiä voidaan luonnehtia lyhyesti Fourier-analyysinä lokaalisti kompakteilla ryhmillä. Nämä ovat reaalilukujoukkoa yleisempiä rakenteita. Lokaalisti kompakti ryhmä on ryhmä varustettuna jollakin sellaisella lokaalisti kompaktilla topologialla, että ryhmäoperaatiot ovat jatkuvia. Voidaan helposti huomata, että Fourier-analyysi perustuu kahteen pääasiaan: integraaliin sekä trigonometrisiin funktioihin. Täten näiden vastineiden löytäminen lokaalisti kompakteiden ryhmien tapauksessa on välttämätöntä Fourier-analyysin laajentamiselle.

Vuonna 1933 Haar osoitti, että jokainen lokaalisti kompakti ryhmä omaa invariantin mitan, ns. Haarin mitan. Tämän invariantin mitan avulla saatu integraali muodostaa harmonisen analyysin yhden peruspilareista luomalla pohjan analyysille lokaalisti kompakteissa ryhmissä. Kysymykseksi jää vielä miten Fourier-kertoimet voidaan yleistään. Tämä onnistuu luontevasti Eulerin osoittaman eksponenttifunktion ja trigonometristen funktioiden välisen symmetrian $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$ avulla. Eksponenttifunktio on itseasiassa jatkuva homomorfismi reaalilukujoukolta R ympyräryhmälle T (ts. yksikkökiekkolle kompleksitasossa). Vastaavasti mikä tahansa jatkuva homomorfismi reaalilukujoukolta R ympyräryhmälle T voidaan samaistaa eksponenttifunktion kanssa. Tämä ajatus voidaan yleistää mielivaltaiselle lokaalisti kompaktille ryhmälle

G. Näitä jatkuvia homomorfismeja $\chi: G \to \mathrm{T}$ ryhmältä G ympyräryhmälle T kutsutaan ryhmän karaktereiksi. Vuonna 1935 van Kampen osoitti, että lokaalisti kompakti kommutatiivinen ryhmä omaa riittävästi karaktereita Fourier-analyysin yleistämiseksi. Kommutatiivisten lokaalisti kompaktien ryhmien tapauksessa puhutaankin usein kommutatiivisesta harmonisesta analyysistä.

Karakterit eivät kuitenkaan ole riittävä työkalu teorian laajentamiseksi ei-kommutatiivisille ryhmille, sillä yleisesti niiden olemassaoloa ei pystytä takaamaan. Ei-kommutatiivisessa tapauksessa riittäväksi työkaluksi muodostuu ns. ryhmäesitys, missä ryhmän alkiot esitetään operaattoreina Hilbertin avaruudella. Kuuluisan Gelfand-Raikovin lauseen mukaan lokaalisti kompatilla ryhmällä on riittävästi sopivia ryhmäesityksiä, jotka puolestaan yleistävät Fourier'n kertoimet ei-kommutatiivisessa tapauksessa.

Harmonisen analyysin sovelluskenttä on erittäin laaja. Klassisista sovelluksista voidaan mainita esimerkiksi navigointi ja moderneista sovellusalueista esimerkiksi signaalinkäsittely, kvanttimekaniikka, tomografia sekä neurotieteet.

Laskennalliset menetelmät ja matemaattinen mallintaminen (Erkki Laitinen)

Informaatioteknologian nopean kehittymisen myötä ovat laskennalliset menetelmät ja matemaattinen mallintaminen tulleet yhä tärkeämmiksi matemaatikon koulutuksessa. Matemaatikon uraa teollisuuden parissa suunnittelevalle ihanteellinen koulutuspaketti sisältää matematiikan teorian lisäksi laajan valikoiman matemaattisia menetelmiä, numeerisia menetelmiä ja ohjelmistotyökalujen käyttöä käsitteleviä kursseja. Tärkeää hänelle on myös kokemus mallinnusongelmien ratkaisemisesta. Onnistuneita mallinnusprojekteja ovat ne, missä eri asiantuntijat onnistuvat yhdistämään tietämyksensä ja näkemyksensä toisiaan vahvistavalla tavalla.

Matemaattinen mallintaminen perustuu matemaattisen mallin käsitteelle. Malli on matematiikan kielellä tehty monimutkaisen todellisuuden yksinkertaistus. Kun matemaattinen malli on rakennettu, sen avulla voidaan ryhtyä tutkimaan mallinnettavaa ilmiötä. Tavallisesti mallia kuvaavat yhtälöt ratkaistaan tietokoneella. Tietokonesimuloinniksi kutsutaan sitä, kun mallin lähtöarvoja, parametreja tai muuttujia muunnellaan vastaamaan erilaisia olosuhteita. Simuloinnin avulla ilmiöitä voidaan usein tarkastella halvemmalla ja turvallisemmin kuin tekemällä kokeita reaalimaailman järjestelmillä. Matemaattinen mallinnus ja simulointi muodostavatkin keskeisen tutkimus- ja suunnittelumenetelmän, jonka avulla matematiikkaa sovelletaan käytännössä.

Laskentatehon lisääntyessä ja numeeristen menetelmien kehittyessä on yhä vaativampien ja realistisempien ilmiöiden laskennallinen simulointi mahdollista. Nykyisin käytetään pitkälle kehittyneitä lakennallisia menetelmiä ja matemaattisia malleja mm. tuotannon ohjaukseen, tuotteiden suunnitteluun, yrityksen strategian muotoiluun tai kustannusten optimointiin. Informaation siirto on hyvä esimerkki, jossa huippututkimus ja reaalielämän tarpeet yhtyvät.

Matemaattisten mallien kehittäminen johtaa usein differentiaali-, integraali- tai variaatioepäyhtälöihin. Pitkälle kehitetyt mallit ovat usein epälineaarisia, ei-sileitä tai jopa epäjatkuvia. Lisäksi niiden reunaehdot ja geometriat saattavat olla niin monimutkaisia, että mallille ei ole löydettävissä analyyttistä ratkaisua. Tällöin ainoaksi vaihtoehdoksi jää approksimoida mallia sopivassa funktioavaruudessa ns. numeerisen mallin avulla, joka voidaan ratkaista tietokoneella. Joskus myös numeerinen malli voi olla niin huonosti käyttäytyvä, että sen ratkaiseminen tietokoneella on vaikeaa.

Differentiaaliyhtälöihin, integraaliyhtälöihin ja variaatioepäyhtälöihin liittyvä matemaattinen teoria, joka antaa yhtenäiset puitteet yhtälöiden ratkaisemiselle ja ratkaisujen tarkastelulle on pääosin kehitetty viime vuosisadan puolella ja on nykyisin hyvin tunnettu. Mallien ratkaisemiseen liittyvät tulevaisuuden haasteet liittyvätkin nopeasti kehittyvän tietotekniikan tehokkaaseen hyödyntämiseen numeerisissa laskenta-algoritmeissa. Matemaattisten tieteiden laitoksella on tehty viime vuosina runsaasti tutkimusta kehitettäessä tehokkaita laskenta-algoritmeja ja simulointimalleja mm. teräksen jatkuvavalun säätöön ja tietoliikenneverkkojen kapasiteetin optimointiin.

Parametriton funktioiden estimointi sovelluksineen (Lasse Holmström)

Funktion käsite on keskeinen kaikkialla matematiikassa ja sen sovelluksissa. Funktiota voi ajatella tapana kuvata suureiden riippuvuutta toisistaan, esimerkkinä vaikkapa ympyrän pinta-alan riippuvuus sen säteestä, jonka ilmaisee kaikkien peruskoulun käyneiden ja siellä läksynsä hyvin lukeneiden tuntema kaava.

Sovellettaessa matemaattisia menetelmiä käytännön ongelmien ratkaisuun törmätään kuitenkin usein tilanteisiin, jossa tutkitulle riippuvuussuhteelle ei voida antaa mitään yksinkertaista täsmällistä kaavaa. Tämä voi johtua siitä, että kaikkia tutkittavien suureiden väliseen riippuvuuteen vaikuttavia tekijöitä ei tunneta tai että suureista tehdyt mittaukset ovat jossain määrin virheellisiä estäen täsmällisen riippuvuuden hahmottamisen. Esimerkkinä voisi olla vaikkapa ihmisen pituuden ja painon välisen riippuvuuden tarkastelu. Mitään täsmällistä kaavaa näiden suureiden väliselle riippuvuudelle ei voida antaa, koska toisen arvo ei määräydy toisesta minkään tietyn säännön mukaan. Tällaista epävarmuuden vallitessa tapahtuvaa riippuvuussuhteen etsimistä voidaan kutsua funktion estimoimiseksi eli "arvioimiseksi". Tämä termi sisältää sen ajatuksen, että tarkkaa riippuvuussuhdetta ei uskotakaan löydettävän ja siksi pyritään käytettävissä olevan tiedon pohjalta vain jossain mielessä parhaaseen mahdolliseen lopputulokseen. Samalla olisi toivottavaa, että saataisiin käsitys myös estimointituloksen sisältämästä epävarmuudesta.

Niin sanottu parametrinen funktioiden estimointi yrittää kuvata tarkastellun riippuvuussuhteen etsimällä parhaan funktion jostain verrattain pienestä, yksinkertaisella kaavalla kuvattavien funktioiden joukosta. Pituuden ja painon riippuvuutta voitaisiin yrittää hahmottaa esimerkiksi mallilla, jonka kuvaaja on suora. Sen sijaan parametriton estimointi ei tällä tavoin rajoita mahdollisten riippuvuussuhteiden kirjoa vaan yrittää löytää parhaan ratkaisun pelkästään saatavilla olevien esimerkkien valossa - vaikkapa pelkästään jonkin riittävän suuren ihmisjoukon pituus- ja painotietoja hyödyntäen.

Tällainen joustava, ”parametriton” lähestymistapa funktioiden estimointiin on ollut tunnettu jo varsin pitkään, ainakin viime vuosisadan puolivälistä alkaen. Sen soveltamista on kuitenkin rajoittanut tämän menetelmän käytön usein vaatima raskas numeerinen laskenta. Sen johdosta parametrittomien funktioiden estimointimenetelmien käytännön läpimurto tapahtui vasta noin 30 vuotta sitten, yhdessä tietokoneiden yleistymisen ja niiden laskentatehon kasvun kanssa.

Funktioiden estimoinnin hyödyllisyyttä monien sovellusten kannalta selittää se, että hyvin monet asiat on ajateltavissa "funktioina", joidenkin suureiden välisenä riippuvuutena. Matemaattisten tieteiden laitoksen tutkimuksessa ovat sovelluskohteina olleet esimerkiksi tietotekniikassa tärkeä hahmontunnistus, digitaalisten kuvien analyysi sekä ilmastomuutokseen liittyvät kysymykset. Myös on tutkittu monimutkaisten, useaa toisistaan riippuvaa suuretta kuvaavien funktioiden visualisointia uuden tyyppisillä tietokonegraafisilla menetelmillä. Niiden avulla on mahdollista ”nähdä” myös sellaisia funktioita, jotka on määritelty kolmiulotteista maailmaamme korkeampidimensioisissa avaruuksissa.

Hahmontunnistuksessa on kyse jonkin kohteen tunnistamisesta siitä tehtyjen mittaus ten perusteella. Esimerkkejä ovat käsinkirjoitetun tekstin ja puheen tunnistus, kasvo jen tunnistus kuvasta, eri kasvillisuustyyppien tunnistus satelliittikuvasta ja tietokonepohjaiset lääketieteelliset diagnoosit. Tässä yhteydessä funktion estimoinnilla haetaan mahdollisimman hyvää kuvausta tarkastellun kohteen tyypin ja siitä tehdyn mittauksen väliselle riippuvuudelle.

Digitaalista kuvaa voi myös ajatella funktiona, joka liittää jokaiseen kuva-alkioon, "pikseliin", tiedon harmaan sävystä tai yleisemmin väristä. Havaitut kuvat, esimerkiksi kaukokartoitukseen liittyvät satelliittikuvat, sisältävät tavallisesti häiriötä ja funktion estimoinnilla voidaan yrittää selvittää kohdetta esittävä todellinen kuva mahdollisimman hyvin.

Ilmastonmuutoksen tutkimuksessa on tärkeää paitsi ennustaa tulevaa kehitystä myös arvioida miten esimerkiksi lämpötila on vaihdellut menneinä vuosisatoina ja -tuhansina. Mennyttä lämpötilan vaihtelua kuvaa jokin funktio, josta on mahdollista saada osittaista tietoa tutkimalla esimerkiksi tiettyjen eliöiden fossiilien runsautta järvien pohjasedimenteissä. Parametriton lähestymistapa on tärkeä, koska emme ennakkoon mitenkään voi tietää millaista tuo mennyt lämpötilan vaihtelu on todellisuudes-

sa ollut. Funktion estimointimenetelmiä voidaan soveltaa myös tulevaa ilmastoa ennustavien tietokonemallien tulosten analyysiin. Myös estimointituloksissa olevan epävarmuuden hyvää ymmärtämistä tarvitaan rationaalisen yhteiskunnallisen päätöksenteon pohjaksi.
Matemaattisten tieteiden laitoksen tutkijoilla on parametrittomassa funktioiden estimoinnissa ja niiden sovelluksissa ollut runsaasti yhteistyötä lukuisten kotimaisten ja ulkomaisten yliopistojen ja tutkimuslaitosten tutkijoiden kanssa.

<u>”Sovellusten ongelmissa käytettävät matemaattiset menetelmät”</u> (Valeriy Serov)

”Sovellettua” matematiikkaa voitaisiin pitää matemaattisena tekniikkana, jota tarvitaan sovellusten (käytännön) ongelmien mallintamisessa ja ratkaisemisessa, joihin sisältyvät fysiikka, teoreettinen fysiikka, kemia, taloustiede, biologia, tekniikka ym. Tällä tavalla ymmärrettynä sovellettu matematiikka on osa koko matematiikkaa. Lisäksi on vaikeaa erottaa toisistaan ”puhdasta” ja ”sovellettua” matematiikkaa. Inversio-ongelmat ovat hyvin tärkeä osa sovellettua matematiikkaa. Inversio-ongelmat muodostavat erittäin tärkeän ja kasvavan tieteenalan, joka on luonteeltaan monitieteellinen. Kuten Gilbert Strang (MIT:n professori) mainitsi, ”- - varmasti kaikenlaiset inversio-ongelmat ovat tulleet keskeisiksi suuressa osassa teollisuusmatematiikkaa”. Monet ongelmat, jotka liittyvät geofysikaaliseen malminetsintään, akustiikkaan, impedanssitomografiaan, signaalinkäsittelyyn ym. voidaan palauttaa osittaisdifferentiaaliyhtälöiden inversio-ongelmiksi ja niiden Fourier-analyysiksi, joka on osa differentiaalioperaattoreiden spektraaliteoriaa.

Differentiaalioperaattoreiden spektraaliteorialla Hilbertin ja Banachin avaruuksissa on avainrooli monien sovelluksissa esiintyvien ongelmien matemaattisessa muotoilussa. Lisäksi näin täsmällinen matemaattinen perusta johtaa syvällisempään näkemykseen näiden ongelmien luonteesta. Pääasiallinen tieteellinen mielenkiintomme suuntautuu singulaarikertoimisten elliptisten differentiaalioperaattoreiden spektraaliteoriaan ja sen sovelluksiin tällaisten operaattoreiden käänteisissä sirontaongelmissa ja käänteisissä spektraaliongelmissa. Tätä tekniikkaa voidaan osittain soveltaa epälineaarisissa aalto- ja evoluutioyhtälöissä, joilla on sovelluksia optiikassa.

Estimoitaessa Schrödingerin yhtälön potentiaaleja sirontadatasta likimääräismenetelmällä, joka tunnetaan Bornin approksimaatiomenetelmänä (tämä tunnetaan myös käytännöllisimpänä menetelmänä), tarkastelemme tuntemattomien potentiaalien rekonstruktiota erilaisilla sirontadatoilla ja erilaisilla potentiaaliluokilla, erityisesti tarkastelemme takaisinsirontaongelmia ja kiinteän kulman sirontaongelmia kahdessa ja kolmessa ulottuvuudessa. Tarkastelemme samoja ongelmia myös magneettiselle Schrödingerin operaattorille. Menetelmän ilmeinen hyöty on se, että Bornin approksimaatiossa sirontadata (sironta-amplitudi) on tuntemattomien potentiaalien Fourier-muunnos. Mitä heikompia potentiaalit ovat, sitä parempi approksimaatio saadaan. Mutta vaikka potentiaalit eivät olisikaan heikkoja, sironta-amplitudin Fourier-muunnos sisältää olennaista informaatiota potentiaaleista. Tätä likimääräismenetelmää voidaan soveltaa tehokkaasti myös suureen joukkoon yleistettyjä epälineaarisia Schrödingerin operaattoreita yhdessä, kahdessa tai kolmessa ulottuvuudessa.

Elliptisten operaattoreiden spektraaliteoria sallii meidän tutkia myös joidenkin Maxwellin yhtälöiden ongelmien ratkeavuutta ja yksikäsitteisyyttä kiraalisessa väliaineessa.

Singulaarikertoimisten elliptisten osittaisdifferentiaalioperaattoreiden spektraaliominaisuuksia edellytetään kaikissa näissä ongelmissa rajoitetuilla ja rajoittamattomilla määritysjoukoilla. Erityisesti tutkimme n-ulotteisen Borg-Levinson teoreeman yleistystä tällaisille operaattoreille.

Tutkimme erilaisia epälineaarisia yhtälöitä, joilla on sovelluksia sähkömagnetismiin ja optiikkaan. Erityisesti tätä tutkimusta sovelletaan TE- ja TM-aaltojen teoriaan epälineaarisissa väliaineissa.

Tutkimme myös tilastollista inversioteoriaa, jota pidetään menetelmänä järkeillä tietämättömyydestä kohti tietämystä, kun tuntemattomasta on annettu epäsuoraa ja kohinaista havaintoa. Lähtökohtana tässä on todennäköisyysjakauma. Se kuvaa epävarmuuksia tuntemattoman käyttäytymisestä. Tietämys - joka myös on todennä-

köisyysjakauma - saadaan Bayesin kaavalla, jossa dataa säädetään päivittämällä. Tilastollisessa inversioteoriassa on kolme peruskysymystä:
PRIORIJAKAUMAN ONGELMA: Miten priorijakauma muodostetaan epätarkasta tiedosta?
INVERSIO: Mitä Bayesin kaava antaa posteriorijakaumana?
POSTERIORIJAKAUMAN ONGELMA: Mitä järkeviä väitteitä tuntemattomasta voidaan poimia posterioritodennäköisyysjakaumasta?
Näitä kysymyksiä tutkitaan ääretönulotteisissa rajatapauksissa.

Näiden ongelmien ratkaisemisessa käytetään (ja kehitetään) modulia Fortran Linear Inverse Problem Solver (FLIPS). FLIPS on Oulun yliopiston kopiointisuojaama ja se on lisensoitu GNU GPL:lle. FLIPS:n viimeisimmän version voi ladata KavaroWikistä. Pakkaus sisältää myös käyttöohjeet.